This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 4508.98.3

Harvard College Library

BOUGHT WITH INCOME

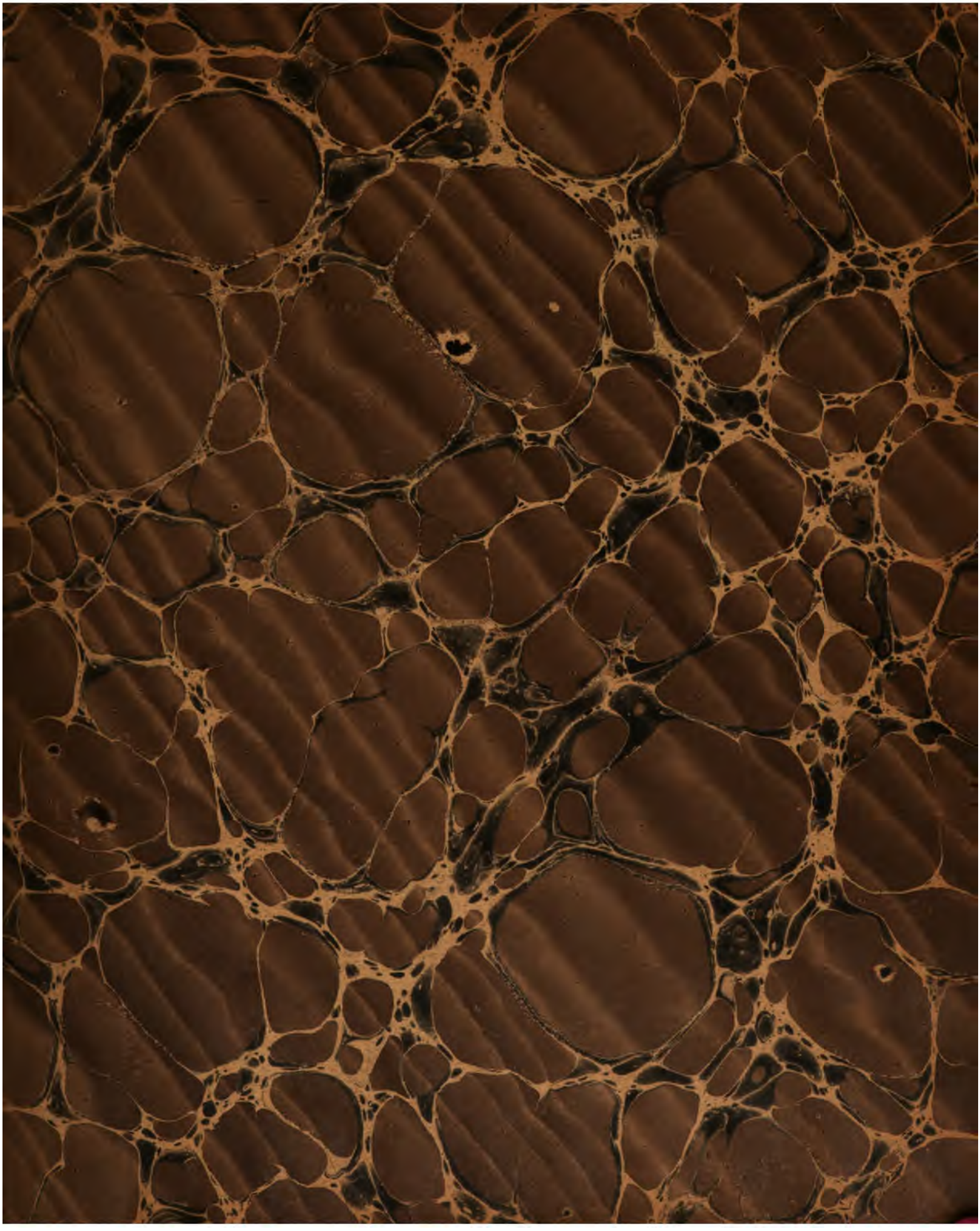
FROM THE BEQUEST OF

HENRY LILLIE PIERCE,

OF BOSTON.

Under a vote of the President and Fellows,
October 24, 1898.

10 April, 1899.



N° D'ORDRE :
939.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. HENRY BOURGET,
Agrégé de l'Université,
Aide-Astronome à l'Observatoire de Toulouse.

1re THÈSE. — SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE GROUPES HYPERABÉLIENS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 janvier 1898, devant la Commission d'examen.

MM. PICARD, *Président.*
POINCARÉ, GOURSAT, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1898

Math 4508.98.8
HARVARD COLLEGE
APR 10 1899
LIBRARY.
Pierce fund

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX, professeur	Géométrie supérieure.
PROFESSEUR HONORAIRE	HERMITE.	
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie physique.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	PELLAT	Physique.
	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

25279 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A LA MÉMOIRE DE

MONSIEUR T.-J. STIELTJES,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

A

MONSIEUR ÉMILE PICARD,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Hommage de reconnaissance et de respect.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR UNE CLASSE

PARTICULIÈRE

DE GROUPES HYPERABÉLIENS.

INTRODUCTION.

Si l'on considère *une* variable complexe ξ, les seules substitutions birationnelles effectuées sur elle sont les transformations linéaires de la forme

$$\left(\xi, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right),$$

et la théorie des groupes formés par ces substitutions et des fonctions appartenant à ces groupes est contenue tout entière dans les travaux célèbres de MM. Poincaré et Klein.

Les choses se passent autrement dans le domaine de *deux* variables complexes ξ et η. A côté des groupes de substitutions de la forme

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b\eta + c}{a''\xi + b''\eta + c''}, \frac{a'\xi + b'\eta + c'}{a''\xi + b''\eta + c''}\right),$$

tout à fait comparables aux groupes fuchsiens et nommés *hyperfuchsiens* par M. Picard, viennent se placer d'autres groupes dont les substitutions, tout en étant birationnelles, ne sont plus forcément linéaires. M. Picard a étudié également une classe de ces groupes qu'il a nommés *groupes hyperabéliens;* dans ce cas, les substitutions sont de l'une ou l'autre des

formes

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\xi+b}{c\xi+d},\ \frac{l\eta+m}{p\eta+q}\right),$$

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\eta+b}{c\eta+d},\ \frac{l\xi+m}{p\xi+q}\right).$$

Elles appartiennent, comme on voit, à la catégorie des substitutions quadratiques. Si l'on remarque maintenant que toute substitution birationnelle équivaut à la composition d'un certain nombre de substitutions quadratiques (Nöther), on apercevra immédiatement l'importance de tels groupes dans la théorie générale des groupes de substitutions birationnelles.

C'est ce qui m'a décidé, sur les conseils de M. Picard, à faire une étude plus détaillée d'un groupe hyperabélien particulier, signalé déjà par ce géomètre dans son Mémoire inséré dans le Tome I de la 4e série du *Journal de Liouville*, et antérieurement, dans une Note des *Comptes rendus*, (17 mars 1884).

Ce groupe particulier a une double origine. On peut le faire dériver de la transformation du premier ordre des fonctions abéliennes du second genre telle qu'elle a été exposée par M. Hermite en 1855; d'autre part, on peut le considérer comme isomorphe au groupe des transformations semblables arithmétiques de la forme quaternaire

$$u_1^2 - \mathrm{D}u_2^2 + u_3u_4.$$

Nous avons divisé ce travail en trois Parties.

Dans la première, après des généralités sur les groupes de substitutions semblables des formes quadratiques quaternaires et sur l'étude arithmétique de telles formes, nous montrons comment le groupe que nous étudions se place parmi les groupes analogues déjà rencontrés par MM. Goursat et Bianchi.

La seconde Partie est consacrée à l'étude du groupe. Nous commençons par chercher la forme explicite des substitutions; nous démontrons sa discontinuité pour les valeurs imaginaires des variables $\xi=\xi_1+i\xi_2$, $\eta=\eta_1+i\eta_2$ appartenant au domaine S ($\xi_2>0$, $\eta_2>0$); nous réduisons ces substitutions à cinq d'entre elles, qu'on peut considérer comme fondamentales et qui présentent une analogie remarquable avec les substitutions fondamentales du groupe modulaire. La théorie de la réduction continuelle de la

forme quadratique quaternaire

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4$$

nous apprend que le domaine fondamental du groupe a un sommet sur la limite du domaine S et nous développons les calculs de réduction, autour de ce sommet dans le cas particulier de $D = 5$. Enfin, nous mettons en évidence une infinité de sous-groupes du groupe considéré, entièrement analogues aux sous-groupes à congruences du groupe modulaire.

Au début de la troisième Partie, nous cherchons comment se comportent vis-à-vis des transformations du groupe, les dix fonctions

$$\vartheta(0, 0 \mid \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

paires à arguments nuls et de cette étude, nous tirons un procédé pour former à l'aide des fonctions ϑ une infinité de fonctions qui se reproduisent par toutes les substitutions du groupe. Nous montrons que les modules de Borchardt ou ceux de Richelot sont des fonctions invariables par des sous-groupes que nous formons.

Enfin, donnant, d'après M. Picard, les propriétés générales des fonctions du groupe, nous terminons en démontrant que, malgré le sommet situé sur la limite du domaine S, trois quelconques de ces fonctions sont liées par une relation algébrique.

Si l'on considère l'étendue de cette question, comparable à l'étude du groupe modulaire, on trouvera ce travail bien incomplet. Pourtant, si l'on y rencontre quelque nouveauté, le mérite en revient à M. Picard que je tiens à remercier ici des bienveillants et précieux conseils qu'il a bien voulu me donner.

Je tiens à remercier également M. Baillaud dont les affectueux encouragements ont rendu ma tâche plus facile, et M. Vessiot de l'intérêt qu'il a constamment porté à mon travail [1].

---

[1] Qu'il me soit permis de remercier également le comité des *Annales* et en particulier son secrétaire, M. Cosserat, des facilités qu'ils m'ont données pour l'insertion de ce travail dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES ET ARITHMÉTIQUES DES SUBSTITUTIONS SEMBLABLES D'UNE FORME.

Généralités sur le groupe algébrique des transformations semblables d'une forme quaternaire.

1. Nous allons considérer, dans ce qui va suivre, une forme quadratique quaternaire à coefficients réels et le groupe des substitutions linéaires à coefficients réels et entiers qui n'altèrent pas la forme quadratique et de déterminant ± 1. Nous nommerons *droite* ou *gauche* une substitution, selon que son déterminant sera $+1$ ou -1.

Soit F la forme donnée et Φ une forme ne contenant que les carrés des variables et dont on puisse déduire F par la substitution linéaire T. Si S désigne une transformation n'altérant pas Φ, la transformée de S par T, $T^{-1}ST$ n'altérera pas F et, réciproquement, à toute transformation n'altérant pas F on peut faire correspondre une transformation qui n'altère pas Φ. Nous pourrons donc raisonner sur la forme Φ (¹). Ajoutons encore que, selon l'usage, nous appellerons *substitution semblable de la forme* toute substitution à coefficients réels et de déterminant ± 1 qui n'altère pas cette forme et *substitution semblable arithmétique* une substitution semblable dont les coefficients sont entiers.

2. Considérons maintenant la forme Φ,

$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2,$$

que nous écrivons comme *somme* de carrés, ce qui est toujours possible au point de vue algébrique, et envisageons les substitutions linéaires telles que l'on ait

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \text{const.}$$

(¹) Il ne faut pas oublier que F peut dériver de Φ d'une infinité de manières. Il est clair que les groupes qu'on étudiera en supposant Φ dérivée de F, d'une manière ou d'une autre, ne seront pas identiques. *Voir*, à ce sujet, POINCARÉ, *Les Fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique* (*Journal de Liouville*, 1887).

On peut toujours supposer que cette constante est égale à 1, en divisant, si cela n'a pas lieu, les variables par un même nombre.

Cela étant, si nous considérons u_1, u_2, u_3, u_4 comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace linéaire à quatre dimensions, nous voyons que la recherche des substitutions semblables de la forme Φ revient à celle des substitutions linéaires orthogonales de l'espace à quatre dimensions.

Faisons la perspective de la sphère

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1,$$

dans l'espace linéaire à trois dimensions $u_4 = 0$, le point de vue étant le point $(0, 0, 0, 1)$. Nous définissons ainsi une transformation du second ordre et si (x, y, z) sont les coordonnées du point de l'espace à trois dimensions qui correspond au point (u_1, u_2, u_3, u_4) de la sphère, on a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{u_1}{1 - u_4}, \\ y &= \frac{u_2}{1 - u_4}, \\ z &= \frac{u_3}{1 - u_4}, \end{aligned} \right.$$

et

$$(1') \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \\ u_2 &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \\ u_3 &= \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \\ u_4 &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît dans (1′) les formules qui donnent les coordonnées pentasphériques du point x, y, z par rapport aux cinq sphères ou plans,

$$x, \quad y, \quad z, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad i(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 0,$$

la dernière coordonnée restant constante.

On peut donc dire qu'à toute substitution orthogonale de l'espace à quatre dimensions correspond une substitution linéaire effectuée sur les coordonnées pentasphériques d'un point qui conserve en outre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

et inversement.

Remarquons que cette transformation effectuée sur les coordonnées

pentasphériques conserve les angles et transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable. M. Goursat a nommé *isogonale* une telle transformation. Remarquons également que les points de la sphère

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0$$

se correspondent un à un et subissent une transformation linéaire, tandis que les autres points de l'espace à quatre dimensions subissent une transformation du second ordre. Le résultat qui précède, fort précieux, puisqu'il nous permet de nous passer de l'espace à quatre dimensions, est bien connu. Il a été utilisé par M. Poincaré dans sa théorie des groupes fuchsiens et kleinéens et par ceux qui se sont occupés des mêmes questions et a été énoncé explicitement par M. Klein, par M. Goursat et par M. Kœnigs (¹).

3. Ce que nous venons de dire est vrai, quels que soient les signes des carrés de la forme Φ, à condition d'introduire les dénominations de la Géométrie non euclidienne; mais, comme les résultats diffèrent notablement suivant le type auquel appartient Φ, il est nécessaire, pour la suite, de distinguer divers cas.

1° Si Φ est du type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, les transformations isogonales conservent une sphère imaginaire $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ et les groupes formés de transformations semblables sont les groupes étudiés par M. Goursat dans le Mémoire cité plus haut. M. Goursat s'est toutefois borné à l'étude des groupes finis.

2° Si Φ est du type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$, la quadrique conservée par les substitutions isogonales est une sphère réelle et comme on peut, en appliquant une transformation isogonale convenable, transformer cette sphère en un plan réel, on aperçoit l'identité des groupes rencontrés, avec les groupes kleinéens. M. Bianchi en a d'ailleurs étudié des cas particuliers en se plaçant à ce point de vue (²).

3° Enfin, si Φ est du type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$, la quadrique conservée est

(¹) Klein, *Programme d'Erlangen* et *M. A.*; t. V. — Poincaré, *Notice sur ses travaux scientifiques* et *Act. Mat.*; t. III. — Goursat, *Sur les substitutions orthogonales* (*A. E. N.*, 3e série, t. VI; 1889). — Kœnigs, *Bibliographie de l'espace réglé* (*A. F. T.*, t. VII; 1893).

Indiquons, une fois pour toutes, que nous n'avons pas l'intention de mentionner dans leur ordre tous les Mémoires se rapportant à la question que nous étudions, mais seulement ceux qui nous ont été le plus utile pour notre travail.

(²) Bianchi, *Math. Ann.*, t. XL, XLII, XLIII; *Annali di Mathem.*, t. XXI, XXIII.

un hyperboloïde réel, qu'on peut également transformer en un plan réel par une substitution isogonale convenable et l'on voit s'introduire des groupes analogues, à ce point de vue, aux groupes kleinéens et que M. Picard (¹) a étudiés sous le nom de *groupes hyperabéliens*. C'est d'un groupe particulier de cette espèce que nous allons nous occuper (²).

4. Utilisant la remarque faite au n° 2 que $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$ se transforme linéairement en elle-même pendant que les points de l'espace à quatre dimensions subissent une transformation du second ordre, nous pouvons, avec M. Goursat, envisager autrement nos substitutions.

Posons

$$u_1 - u_3 = v_1, \qquad -u_1 - u_3 = v_4, \qquad u_2 + u_4 = v_2, \qquad u_2 - u_4 = v_3.$$

Les transformations semblables feront revenir sur elle-même la quadrique

$$v_1 v_4 - v_2 v_3 = 0.$$

M. Goursat (³) a démontré qu'en posant

$$\xi = \frac{v_1}{v_3} = \frac{v_2}{v_4}, \qquad \eta = \frac{v_4}{v_3} = \frac{v_2}{v_1},$$

toute transformation semblable correspondait à une transformation de l'une ou l'autre forme

$$\text{(A)} \qquad \left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\xi + b}{c\xi + d},\ \frac{l\eta + m}{p\eta + q}\right),$$

$$\text{(B)} \qquad \left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\eta + b}{c\eta + d},\ \frac{l\xi + m}{p\xi + q}\right).$$

Nous pouvons nous convaincre de ce fait en remarquant que les collinéations qui n'altèrent pas une quadrique

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$$

sont de deux espèces :

(¹) Picard, *Comptes rendus*, 17 mars 1884; *Journal de Liouville*, 4e série, t. I; 1885.

(²) On voit qu'on passe d'un de ces groupes à l'autre, par des substitutions imaginaires simples. Il semble donc qu'on puisse étudier, d'un même coup, tous ces groupes en partant des substitutions semblables à coefficients complexes.

(³) Goursat, *Bull. Soc. Math.*, t. XI; 883.

1° Des collinéations droites qui transforment chaque génératrice rectiligne d'un système en une autre génératrice appartenant au même système et qui, par suite, laissent immobiles, sur la quadrique, quatre points, réels ou imaginaires, distincts ou non;

2° Des collinéations gauches, qui permutent les deux systèmes de génératrices rectilignes.

On voit également sans peine que l'ensemble de ces collinéations forme un groupe dans lequel les collinéations droites constituent un sous-groupe invariant d'indice 2.

Parmi les collinéations gauches, remarquons les homologies harmoniques qui sont de période 2 et qui laissent invariables sur la quadrique tous les points de l'intersection de cette quadrique avec le plan d'homologie.

5. Dans l'espace à quatre dimensions introduit plus haut, l'équation

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$$

représente l'intersection de la quadrique

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 1$$

par l'espace linéaire à trois dimensions qui contient les points à l'infini de l'espace à quatre dimensions. Nous pouvons donc imaginer que cette intersection soit la quadrique servant de définition aux longueurs et aux angles de cet espace.

La quadrique se présente alors comme une sphère non euclidienne de rayon 1.

Les substitutions semblables sont des rotations autour de l'origine ou des rotations suivies de symétrie selon qu'elles sont droites ou gauches et enfin les homologies harmoniques sont de simples symétries.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que nous utilisons ici une géométrie non euclidienne à quadrique fondamentale *réelle* et, par suite, appartenant à une classe laissée de côté par M. Klein, signalée par M. Poincaré. On ne doit pas oublier que, dans ce cas, les rotations ont une limite.

6. Dans la suite, nous aurons plus particulièrement à nous occuper de la forme

$$\Phi = u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4,$$

D étant un nombre entier positif. Cette forme est bien réductible au type considéré et l'on voit sans peine que le résultat du n° 4 devient le suivant :

A toute collinéation faisant revenir sur elle-même

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4$$

correspond sur les paramètres ξ, η, définis par les formules

$$\frac{\xi}{u_1 - \sqrt{D}\, u_2} = \frac{\eta}{-u_1 - \sqrt{D}\, u_2} = \frac{\xi\eta}{u_4} = \frac{1}{u_3}$$

ou

$$\frac{u_1}{\xi - \eta} = \frac{u_2}{-\frac{1}{\sqrt{D}}(\xi + \eta)} = \frac{u_3}{2} = \frac{u_4}{2\xi\eta},$$

une transformation de la forme (A) ou de la forme à déterminants $+1$.

Réciproquement, si nous nous donnons une substitution de la forme (A) et si nous cherchons la substitution linéaire correspondante, nous trouvons

$$\begin{aligned}
U_1 &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4,\\
U_2 &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4,\\
U_3 &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 + \gamma_3 u_3,\\
U_4 &= \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \delta_3 u_3 + \delta_4 u_4,
\end{aligned}$$

avec les valeurs suivantes des coefficients

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \lambda(aq + dl - bp - cm), & \beta_1 &= -\lambda : \sqrt{D}\,(aq + cm - bp - dl),\\
\alpha_2 &= \lambda\sqrt{D}\,(cm + dl - aq - bp), & \beta_2 &= \lambda(aq + cm + bp + dl),\\
\alpha_3 &= \lambda(bq - dm), & \beta_3 &= -\lambda : \sqrt{D}\,(bq + dm),\\
\alpha_4 &= \lambda(ap - cl), & \beta_4 &= -\lambda : \sqrt{D}\,(ap + cl),\\
\gamma_1 &= 2\lambda(cq - dp), & \delta_1 &= 2\lambda(am - bl),\\
\gamma_2 &= -2\lambda\sqrt{D}\,(cq + dp), & \delta_2 &= -2\lambda\sqrt{D}\,(am + bl),\\
\gamma_3 &= 2\lambda dq, & \delta_3 &= 2\lambda bm,\\
\gamma_4 &= 2\lambda cp, & \delta_4 &= 2\lambda al,
\end{aligned}$$

où λ a la valeur

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\Delta\Delta_1}},$$

$$\Delta = ad - bc, \qquad \Delta_1 = lq - mp.$$

On voit donc qu'à toute substitution de la forme (A) correspondent deux

substitutions linéaires sur les u_i et que ces substitutions se déduisent l'une de l'autre en changeant u_i en $-u_i$, ce qui était évident *a priori*, car ξ et η ne changent point si l'on change u_i en $-u_i$. De plus, ces deux substitutions ont toutes les deux leurs déterminants égaux à $+1$. Comme une substitution (B) est le produit d'une substitution (A) par la substitution

$$(\xi, \eta; \eta, \xi),$$

laquelle équivaut à la suivante

$$(u_1, -u_1),$$

on en conclut qu'à toute substitution (B) correspondent aussi deux substitutions linéaires gauches ne différant que par le signe de λ.

Substitutions semblables arithmétiques d'une forme à coefficients entiers.

7. Dans tout ce que nous venons de dire, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse que la forme quadratique et les substitutions linéaires ont leurs coefficients entiers. En réalité, les considérations précédentes s'appliquent au groupe algébrique des substitutions qui reproduisent la forme.

L'étude arithmétique de ces substitutions exige de nouveaux principes. Ils ont été posés par M. Hermite dans ses belles études sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres (1). Cette étude repose tout entière sur l'algorithme particulier que M. Hermite a nommé *réduction continuelle des formes indéfinies*.

M. Picard (2) a montré le grand parti qu'on pouvait tirer de cet algorithme pour la théorie des fonctions en faisant voir qu'il conduisait de la façon la plus naturelle et la plus régulière au domaine fondamental des groupes discontinus que l'on a à envisager. M. Picard a appliqué cette méthode successivement aux formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées, aux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées, et enfin aux formes quadratiques quaternaires du type qui nous occupe.

---

(1) HERMITE, *Lettres à Jacobi sur la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. 40); *Mémoire sur la théorie des formes quadratiques* (*Journal de Crelle*, t. 47).

(2) PICARD, *Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires* (*Annales de Mathématiques*, t. I); *Sur les formes quadratiques binaires à indéterminations conjuguées* (*Annales de l'École Normale*, 1884); *Sur les formes quadratiques ternaires à indéterminations conjuguées* (*Annales de Mathématiques*, t. V); *Sur les formes quadratiques quaternaires indéfinies* (*Journal de Liouville*, 1885).

8. Dans cette dernière application, M. Picard a écarté dès le début le cas particulier où la forme peut représenter rationnellement o. Ce cas se présente précisément dans la forme signalée plus haut

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4,$$

comme il est facile de s'en convaincre par l'exemple suivant

$$1 - 3.(3)^2 + 2.13 = 0.$$

Il est donc nécessaire, pour pouvoir utiliser la théorie de la réduction continuelle, d'examiner ce cas particulier. C'est ce que nous avons essayé de faire en suivant d'ailleurs la marche adoptée par M. Picard dans le cas particulier analogue des formes ternaires à indéterminées conjuguées. On doit cependant remarquer que les calculs sont plus pénibles dans le cas des formes quaternaires et il nous a été impossible d'aller aussi loin dans les détails.

9. Soit donc une forme indéfinie à coefficients entiers

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 \\ + 2 b_{12} x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + 2 b_{14} x_1 x_4 \\ + 2 b_{23} x_2 x_3 + 2 b_{24} x_2 x_4 \\ + 2 b_{34} x_3 x_4, \end{aligned}$$

réductible au type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$ par la substitution

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4, \\ u_2 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 + \delta' x_4, \\ u_3 &= \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 + \delta'' x_4, \\ u_4 &= \alpha''' x_1 + \beta''' x_2 + \gamma''' x_3 + \delta''' x_4. \end{aligned}$$

Conformément à la méthode de M. Hermite, il faut adjoindre à la forme indéfinie

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

la forme définie

$$\varphi = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2,$$

les U_i étant les fonctions linéaires suivantes

$$U_i = M_i u_1 + P_i u_2 + Q_i u_3 + R_i u_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où les M_i, P_i, Q_i, R_i désignent les coefficients non forcément entiers d'une

substitution qui transforme en elle-même

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

la forme φ contient donc un certain nombre de paramètres variant d'une manière continue. M. Picard a démontré que ces paramètres peuvent se réduire à deux

$$\xi = \xi' + i\xi'', \qquad \eta = \eta' + i\eta'',$$

et que l'on peut ramener φ à la forme

$$\begin{aligned}\varphi = {} & (\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi)(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2) \\ & + 2\mathfrak{M}[(\eta - \xi)u_1 - (1 + \xi\eta)u_2 + (\eta + \xi)u_3 + (1 - \xi\eta)u_4],\end{aligned}$$

dans laquelle on doit supposer nécessairement

$$(\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi) > 0,$$

ce qui revient à dire que ξ'' et η'' doivent être de même signe, positifs par exemple. Nous désignerons dans la suite le domaine de l'espace à quatre dimensions, dans lequel $\xi'' > 0$ et $\eta'' > 0$ par la lettre S, et sa limite $\xi'' = 0$, $\eta'' = 0$, par (S) la notation $\mathfrak{M}A$ désignant la norme de A.

10. En écrivant φ sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi = {} & A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + A_4 x_4^2 \\ & + 2B_{12}x_1x_2 + 2B_{13}x_1x_3 + 2B_{14}x_1x_4 \\ & + 2B_{23}x_2x_3 + 2B_{24}x_2x_4 \\ & + 2B_{34}x_3x_4.\end{aligned}$$

M. Picard [1] a démontré que l'on a les inégalités

$$|a_1| \leqq A_1, \qquad |a_2| \leqq A_2, \qquad |a_3| \leqq A_3, \qquad |a_4| \leqq A_4,$$

$$|a_i a_k - b_{ik}^2| \leqq A_i A_k - B_{ik}^2,$$
$$(i \neq k, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4),$$

$$|\text{Discrim.}\, f(0, x_2, x_3, x_4)| \leqq \text{Discrim.}\, \varphi(0, x_2, x_3, x_4),$$
$$|\text{Discrim.}\, f(x_1, 0, x_3, x_4)| \leqq \text{Discrim.}\, \varphi(x_1, 0, x_3, x_4),$$
$$|\text{Discrim.}\, f(x_1, x_2, 0, x_4)| \leqq \text{Discrim.}\, \varphi(x_1, x_2, 0, x_4),$$
$$|\text{Discrim.}\, f(x_1, x_2, x_3, 0)| \leqq \text{Discrim.}\, \varphi(x_1, x_2, x_3, 0).$$

---

[1] *Journal de Liouville*, 1885.

11. Enfin, nous dirons avec MM. Korkine et Zolotareff qu'une forme quaternaire définie est réduite si on peut l'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}&\mu_1(x_1+\varepsilon_1x_2+\varepsilon_2x_3+\varepsilon_3x_4)^2\\&\quad+\mu_2(x_2+\varepsilon_4x_3+\varepsilon_5x_4)^2\\&\qquad+\mu_3(x_3+\varepsilon_6x_4)^2\\&\qquad\quad+\mu_4x_4^2,\end{aligned}$$

dans laquelle les nombres μ_i sont positifs et satisfont aux conditions

$$\mu_2 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_3,$$
$$\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = \Delta,$$

et les ε_i sont positifs ou négatifs, satisfaisant aux conditions

$$|\varepsilon_i| < \tfrac{1}{2}.$$

MM. Korkine et Zolotareff ont démontré que toute forme quaternaire était équivalente arithmétiquement à une telle forme réduite.

De plus, on trouve sans peine

$$\varepsilon_1 = \frac{B_{12}}{A_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{B_{13}}{A_1}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{B_{14}}{A_1},$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial B_{23}}}{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}, \qquad \varepsilon_5 = \frac{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial B_{23}\,\partial B_{34}}}{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}, \qquad \varepsilon_6 = \frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial B_{34}}}{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A_4}},$$

$$\mu_1 = A_1, \qquad \mu_2 = \frac{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}{A_1}, \qquad \mu_3 = \frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A_4}}{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}, \qquad \mu_4 = \frac{\Delta}{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A_4}};$$

les conditions

$$\mu_2 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_3$$

peuvent s'écrire

$$A_1A_2 - B_{12}^2 \geqq \tfrac{1}{2}A_1^2,$$

$$A_1\begin{vmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & A_2 & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & A_3 \end{vmatrix} \geqq \tfrac{1}{2}(A_1A_2 - B_{12}^2),$$

$$(A_1A_2 - B_{12}^2)\,\Delta \geqq \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & A_2 & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & A_3 \end{vmatrix}^2.$$

12. Cela étant, considérons la forme définie φ; elle ne sera pas réduite,

en général, et il faudra, pour la réduire, lui appliquer une substitution T; nous dirons que fT est réduite.

φ, étant réduite pour un système de valeurs de ξ et η, ne le sera que pour les valeurs voisines satisfaisant à certaines conditions; en d'autres termes, tant que le point (ξ', ξ''; η', η'') de l'espace à quatre dimensions sera à l'intérieur d'un certain domaine D et si nous imaginons que ce point varie de toutes les manières possibles, il faudra, suivant les régions où il sera, employer telle ou telle substitution pour réduire φ et, par conséquent, la forme indéfinie correspondante f.

L'ensemble de ces opérations de réduction sur la forme f constitue ce que l'on appelle la *réduction continuelle de la forme f*.

Parmi les applications de cette méthode, nous citerons, comme montrant très clairement la marche de cet algorithme, le développement des irrationnelles du troisième degré, fait par M. Charve dans sa Thèse.

Dans ce qui suit, nous ne développerons pas la théorie générale de la réduction continuelle des formes quadratiques quaternaires, qui paraît présenter encore bien des points non éclaircis, mais nous appliquerons à la forme qui nous occupe

$$x_1^2 - Dx_2^2 + x_3x_4$$

l'algorithme de la réduction continuelle.

13. Nous allons seulement démontrer, relativement à la théorie de la réduction continuelle, quelques propositions qui nous seront utiles dans l'exemple que nous voulons traiter. Rappelons d'abord qu'il résulte d'un théorème général énoncé par M. Hermite que *le nombre des formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme indéfinie donnée est fini.*

14. Nous allons démontrer que le domaine D, dans lequel une forme est réduite, ne peut avoir qu'un point commun avec la limite du domaine S, considérée plus haut.

En vertu des inégalités auxquelles sont assujettis les μ_i, on a

$$\mu_1^4 \geqq 2^6 \Delta.$$

Or, le discriminant de la forme φ est, après quelques calculs faciles,

$$\Delta = \delta(\eta - \eta_0)^4 (\xi_0 - \xi)^4,$$

δ désignant le discriminant de la forme f. Comme de plus, dans φ, le coefficient de x_1^2 est μ_1, l'inégalité ci-dessus devient

$$(\eta-\eta_0)(\xi_0-\xi)a_1+2\mathfrak{N}[(\eta-\xi)\alpha-(1+\xi\eta)\alpha'+(\eta+\xi)\alpha''+(1-\xi\eta)\alpha''']$$
$$\leqq 2^{\frac{3}{2}}.\delta^{\frac{1}{4}}(\eta-\eta_0)(\xi_0-\xi).$$

Si donc le domaine D a un point commun ξ', η' avec la limite du domaine S, on aura

$$(\eta'-\xi')\alpha-(1+\xi'\eta')\alpha'+(\eta'+\xi')\alpha''+(1-\xi'\eta')\alpha'''=0.$$

D'autre part, si un point variable (ξ, η) se rapproche suivant un chemin quelconque du point (ξ', η'), on voit que l'on a

$$\lim \mu_1=0,$$
$$\lim \mu_2=A_2,$$
$$\lim \mu_3=A_3-\frac{B_{23}^2}{A_2};$$

quant à la limite de μ_4, elle ne nous servira pas.

Ces limites sont évidentes si l'on remarque que l'on a

$$\lim A_1=0,$$
$$\lim B_{12}=0,$$
$$\lim B_{13}^2 A_2=0,$$

qui se tirent immédiatement des inégalités

$$\mu_{i+1}\geqq\tfrac{1}{2}\mu_i.$$

Mais, pour $\xi=\xi'$, $\eta=\eta'$, la forme φ se réduit à

$$2\{\ [(\eta'-\xi')\beta-(1+\xi'\eta')\beta'+(\eta'+\xi')\beta''+(1-\xi'\eta')\beta''']x_2$$
$$+[(\eta'-\xi')\gamma-(1+\xi'\eta')\gamma'+(\eta'+\xi')\gamma''+(1-\xi'\eta')\gamma''']x_3$$
$$+[(\eta'-\xi')\delta-(1+\xi'\eta')\delta'+(\eta'+\xi')\delta''+(1-\xi'\eta')\delta''']x_4\}^2,$$

dont le discriminant est nul. On a donc

$$\mu_2\mu_3\mu_4=0,$$

ce qui donne

$$\mu_2=0,$$

car les hypothèses $\mu_3=0$ et μ_4 donnent aussi

$$\mu_2=0,$$

par suite des inégalités

$$\mu_3 \leqq \tfrac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_2.$$

Or $\mu_2 = A_2$ dans ce cas; donc A_2 est nul et la forme devient

$$2\{ \quad [(\eta' - \xi')\gamma - (1 + \xi'\eta')\gamma' + (\eta' + \xi')\gamma'' + (1 - \xi'\eta')\gamma''']x_1$$
$$+ [(\eta' - \xi')\delta - (1 + \xi'\eta')\delta' + (\eta' + \xi')\delta'' + (1 - \xi'\eta')\delta''']x_2\}^2,$$

dont le discriminant est encore nul; on a donc

$$\mu_3\mu_4 = 0;$$

d'où

$$\mu_3 = 0.$$

Or

$$\mu_3 = [(\eta' - \xi')\gamma - (1 + \xi'\eta')\gamma' + (\eta' + \xi')\gamma'' + (1 - \xi'\eta')\gamma'''].$$

On a donc, en définitive, les deux conditions $\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 0$ qui entraînent $\mu_2 = 0$. Elles s'écrivent

$$(\alpha) \qquad (\eta' - \xi')\alpha - (1 + \xi'\eta')\alpha' + (\eta' + \xi')\alpha'' + (1 - \xi'\eta')\alpha''' = 0,$$
$$(\beta) \qquad (\eta' - \xi')\beta - (1 + \xi'\eta')\beta' + (\eta' + \xi')\beta'' + (1 - \xi'\eta')\beta''' = 0,$$
$$(\gamma) \qquad (\eta' - \xi')\gamma - (1 + \xi'\eta')\gamma' + (\eta' + \xi')\gamma'' + (1 - \xi'\eta')\gamma''' = 0.$$

Le point (ξ', η') devra de plus satisfaire à

$$(\xi'_0 - \xi')(\eta' - \eta'_0) = 0.$$

On peut donner une autre forme à ces conditions.

Écrivons les trois premières sous la forme

$$p\,\xi'\eta' + q\,\xi' + r\,\eta' + s = 0,$$
$$p'\xi'\eta' + q'\xi' + r'\eta' + s' = 0,$$
$$p''\xi'\eta' + q''\xi' + r''\eta' + s'' = 0,$$

les valeurs des $p, q, r, s, \ldots$ se trouvant aisément.

On tire des deux premières, par exemple,

$$(pq' - p'q)\xi'^2 + (ps' - p's + rq' - r'q)\xi' + rs' - r's = 0,$$
$$(pr' - p'r)\eta'^2 + (ps' - p's + qr' - q'r)\eta' + qs' - q's = 0.$$

Comme les quantités $p, q, r, s, \ldots$ sont réelles, la première équation a pour racines ξ' et ξ'_0, la seconde η' et η'_0, donc la condition

$$(\xi'_0 - \xi')(\eta' - \eta'_0) = 0$$

équivaut à dire que l'une de ces deux équations a une racine double; la première, par exemple, ce qui donne

$$(ps' - p's + rq' - r'q)^2 - 4(pq' - p'q)(rs' - r's) = 0,$$

qui, calculée, est égale à

$$b_{12}^2 - a_1 a_2 = 0.$$

Si nous écrivons que l'équation en η' a une racine double, nous trouvons la même condition.

Si nous combinons ensemble la première équation (α) avec la troisième (γ), comme nous avons fait pour la première et la seconde, nous ne trouvons

$$b_{13}^2 - a_1 a_3 = 0.$$

D'un autre côté, M. Picard [1] a démontré que, si l'on avait $a_1 \neq 0$, on pouvait avoir

$$(\xi'_0 - \xi')(\eta' - \eta'_0) = 0.$$

Nous concluons donc de là, que les *seules réduites, dont le domaine* D *peut avoir des points communs avec la limite du domaine* S, *sont celles dans lesquelles*

$$a_1 = 0, \qquad b_{12} = 0, \qquad b_{13} = 0,$$

et le domaine D *n'a qu'un point commun, s'il a des points communs avec la limite du domaine* S.

Les coordonnées de ce point dépendent des α, β, γ, ..., c'est-à-dire du mode de réduction de f à la forme canonique.

15. Remarquons aussi que l'existence des réduites dans lesquelles $a_1 = 0$ est entièrement subordonnée au fait qu'il y a un système de nombres entiers qui annulent la forme.

Faisons, en effet, dans f une substitution de déterminant 1 et à coefficients entiers; le coefficient de x_1^2 dans la transformée de f est

$$f(A, A', A'', A'''),$$

A, A', A'', A''' désignant les coefficients de x_1 dans la substitution. Cette quantité ne peut être nulle que s'il y a un système A, A', A'', A''' de nombres entiers annulant la forme.

---

(1) *Journal de Liouville*, 1885.

Pour s'assurer de l'existence d'un tel système de nombres entiers, il suffit de se reporter à la solution générale de cette question donnée par M. Jordan dans son Mémoire sur les formes quadratiques inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique* (1).

Il nous suffit de savoir que de telles réduites sont possibles, ce que nous avons montré en faisant voir, par un exemple, qu'il peut y avoir un système de nombres entiers rendant la forme égale à zéro.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXXI.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DU GROUPE.

Recherche des substitutions du groupe, considéré comme sous-groupe du groupe de la transformation des fonctions abéliennes.

16. Arrivons, après ces préliminaires, au groupe particulier dont l'étude est l'objet de ce travail.

Il a son origine dans la théorie de la transformation du premier ordre des fonctions abéliennes de second genre.

M. Hermite [1] a démontré que les transformations du premier ordre effectuées sur les périodes conduisent à un groupe important de substitutions non linéaires sur les périodes des intégrales normales.

Désignant par

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \tau_{11}, & \tau_{12}, \\ 0, & 1, & \tau_{21}, & \tau_{22}, \end{matrix}$$

le tableau des périodes des intégrales normales et posant

$$(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i,$$

ces substitutions sont

$$\tau'_{11} = \frac{(db)_{01} + (db)_{31}\tau_{11} + 2(db)_{03}\tau_{12} + (db)_{02}\tau_{22} + (db)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\tau_{11} + 2(ab)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})},$$

$$\tau'_{12} = \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}\tau_{11} + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]\tau_{12} + (ad)_{02}\tau_{22} + (ad)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\tau_{11} + 2(ab)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})},$$

$$\tau'_{22} = \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}\tau_{11} + 2(ac)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ac)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\tau_{11} + 2(ab)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})};$$

les a, b, c, d étant des entiers réels vérifiant le système des six relations

$$(1) \qquad (ad)_{03} + (bc)_{03} = 1,$$
$$(2) \qquad (ad)_{12} + (bc)_{12} = 1,$$
$$(3) \qquad (ad)_{01} + (bc)_{01} = 0,$$
$$(4) \qquad (ad)_{02} + (bc)_{02} = 0,$$
$$(5) \qquad (ad)_{13} + (bc)_{13} = 0,$$
$$(6) \qquad (ad)_{23} + (bc)_{23} = 0,$$

---

[1] HERMITE, *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus*, t. XL; 1855).

ou le système équivalent :

$$(1') \qquad (ad)_{03} + (ad)_{12} = 1,$$
$$(2') \qquad (bc)_{03} + (bc)_{12} = 1,$$
$$(3') \qquad (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0,$$
$$(4') \qquad (ac)_{03} + (ac)_{12} = 0,$$
$$(5') \qquad (bd)_{03} + (bd)_{12} = 0,$$
$$(6') \qquad (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0,$$

le déterminant de la transformation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

étant d'ailleurs égal à l'unité positive.

Comme nous l'avons remarqué, les substitutions ci-dessus ne sont pas linéaires. M. Picard (¹) a fait voir qu'en fixant la valeur du déterminant

$$\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}$$

égale à un nombre entier positif non carré D, on isolait du groupe précédent, un sous-groupe de nature très remarquable. Posons donc

$$\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22} = D$$

et résolvons cette relation comme il suit :

$$\tau_{11} = -\frac{2\sqrt{D}}{\xi + \eta}, \qquad \tau_{12} = \sqrt{D}\,\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}, \qquad \tau_{22} = \frac{2\sqrt{D}\,\xi\eta}{\xi + \eta},$$

$\sqrt{D}$ désignant la valeur arithmétique du radical, ξ, η étant deux paramètres complexes en général.

Les substitutions sur les τ_{ij} sont devenues linéaires; de plus, par l'introduction des paramètres ξ, η, nous faisons correspondre à ces substitutions des substitutions sur ξ, η. Ce sont ces dernières que nous allons spécialement étudier dans ce Travail.

Nous isolons donc, en définitive, une classe particulière de fonctions abé-

(¹) *Comptes rendus*, 1er semestre 1884 et *Journal de Liouville*, 1885.

liennes du second genre et il y a lieu d'étudier, pour cette classe, la transformation des fonctions θ, les fonctions θ à arguments nuls, etc. C'est un point de vue sur lequel M. Hermite a attiré depuis longtemps l'attention et auquel M. Picard (¹) s'est placé dans un travail sur les fonctions θ à trois arguments pour obtenir un exemple effectif des plus intéressants de fonctions hyperfuchsiennes.

Tout d'abord les paramètres complexes ont une limitation qui est importante pour la suite.

Posons

$$\tau_{11}=\tau'_{11}+i\tau''_{11}, \qquad \tau_{12}=\tau'_{12}+i\tau''_{12}, \qquad \tau_{22}=\tau'_{22}+i\tau''_{22},$$

on sait qu'on doit avoir

$$\tau''_{11}>0, \qquad \tau''_{12}>0, \qquad \tau''^2_{12}-\tau''_{11}\tau''_{22}<0,$$

posant, en outre,

$$\xi=\xi'+i\xi'', \qquad \eta=\eta'+i\eta'',$$

on trouve sans peine

$$\tau''_{11}=\frac{2\sqrt{D}(\xi''+\eta'')}{\mathcal{N}(\xi+\eta)},$$

$$\tau''_{22}=\frac{2\sqrt{D}[\eta''(\xi'^2+\xi''^2)+\xi''(\eta'^2+\eta''^2)]}{\mathcal{N}(\xi+\eta)},$$

$$\tau''_{12}=\frac{2\sqrt{D}(\eta'\xi''-\xi'\eta'')}{\mathcal{N}(\xi+\eta)}.$$

De là on tire

$$\tau''^2_{12}-\tau''_{11}\tau''_{22}=\frac{-4D\xi''\eta''}{(\xi'+\eta')^2+(\xi''+\eta'')^2};$$

ce qui montre que ξ'' et η'' doivent être de même signe et, comme τ''_{11} et τ''_{22} sont positifs, on en conclut

$$\xi''>0, \qquad \eta''>0,$$

qui est la limitation annoncée.

17. Cela posé, commençons par chercher l'expression analytique des substitutions du sous-groupe en fonction des coefficients de la transformation a_i, b_i, c_i, d_i.

(¹) *Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes* (*Comptes rendus*, 1er semestre; 1883).

M. Picard a fait voir qu'en supposant

$$\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22} = D,$$

on était conduit à adjoindre aux relations (1), (2), (3), (4), (5), (6) les quatre suivantes :

$$(7) \qquad (cd)_{13} = D(ab)_{13},$$

$$(8) \qquad (cd)_{03} = D(ab)_{03},$$

$$(9) \qquad (cd)_{02} = D(ab)_{02},$$

$$(10) \qquad (ab)_{23}D^2 + [(ab)_{01} - (cd)_{23}]D - (cd)_{01} = 0.$$

Nous avons donc seize paramètres a_0, b_0, c_0, d_0, ..., a_3, b_3, c_3, d_3 liés par les dix relations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10).

Nous allons transformer ce système de dix équations en une succession de systèmes équivalents et exprimer finalement les c et les d en fonctions des a et des b qui seront liés par deux relations que nous conserverons.

18. Supposons d_0 et d_3 différents de zéro et $(bd)_{03}$ aussi. Des équations (1), (7), (8), (9), on peut tirer c_0, c_1, c_2, c_3 et les porter dans les équations (3), (4), (5), (6).

Le système (1), ..., (10) est remplacé par le système équivalent

$$(11) \qquad c_0(bd)_{03} = d_0 - d_0(ad)_{03} + b_0 D(ab)_{03},$$

$$(12) \qquad c_1(bd)_{03} = d_1 - d_1(ad)_{03} + \frac{b_3 d_1}{d_3} D(ab)_{03} + \frac{(bd)_{03}}{d_3} D(ab)_{13},$$

$$(13) \qquad c_2(bd)_{03} = d_2 - d_2(ad)_{03} + \frac{b_0 d_2}{d_0} D(ab)_{03} - \frac{(bd)_{03}}{d_0} D(ab)_{02},$$

$$(14) \qquad c_3(bd)_{03} = d_3 - d_3(ad)_{03} + b_3 D(ab)_{03},$$

$$(2) \qquad (ad)_{12} + (bc)_{12} = 1,$$

$$(15) \qquad \left(d_0 - D\frac{b_0 b_3}{d_3}\right)[\ a_0(bd)_{13} - a_1(bd)_{03} + a_3(bd)_{01}] + (bd)_{01} = 0,$$

$$(16) \qquad \left(d_0 - D\frac{b_0^2}{d_0}\right)[\ a_0(bd)_{23} - a_2(bd)_{03} + a_3(bd)_{02}] + (bd)_{02} = 0,$$

$$(17) \qquad \left(d_3 - D\frac{b_3^2}{d_3}\right)[-a_0(bd)_{13} + a_1(bd)_{03} - a_3(bd)_{01}] + (bd)_{13} = 0,$$

$$(18) \qquad \left(d_3 - D\frac{b_0 b_3}{d_0}\right)[-a_0(bd)_{23} + a_2(bd)_{03} - a_3(bd)_{02}] + (bd)_{23} = 0,$$

$$(10) \qquad (ab)_{23}D^2 + [(ab)_{01} - (cd)_{23}]D - (cd)_{01} = 0.$$

Supposons $d_0 - D\frac{b_0 b_3}{d_3} \neq 0$; en vertu d'hypothèses déjà faites, on en conclut que les facteurs

$$d_0 - D\frac{b_0^2}{d_0} \quad \text{et} \quad d_3 - D\frac{b_3^2}{d_3}$$

sont différents de zéro et on tire des équations (15), (16), (17), (18)

$$(19) \qquad d_1 - D\frac{b_1 b_3}{d_3} = 0,$$

$$(20) \qquad d_2 - D\frac{b_0 b_2}{d_0} = 0,$$

D'autre part, nous tirons de (15) et (16) pour a_1 et a_2 les expressions

$$(21) \qquad a_1(bd)_{03} = -b_1 + b_1(ad)_{03} - \frac{D b_1 b_3}{d_3}(ab)_{03},$$

$$(22) \qquad a_2(bd)_{03} = -b_2 + b_2(ad)_{03} - \frac{D b_0 b_2}{d_0}(ab)_{03}.$$

Tirons maintenant de (19), (20), (21) et (22) les valeurs de d_1, d_2, a_1 et a_2 et portons-les dans (12), (13) et (2). Nous obtenons

$$(23) \qquad c_1 = -\frac{a_3 b_1}{d_3} D,$$

$$(24) \qquad c_2 = -\frac{a_0 b_2}{d_0} D,$$

$$(25) \qquad D = -\frac{d_0 d_3}{b_1 b_2},$$

de sorte que le système primitif des dix équations est équivalent au système suivant :

$$(10) \qquad (ab)_{23} D^2 + [(ab)_{01} - (cd)_{23}] D - (cd)_{01} = 0,$$

$$(11) \qquad c_0(bd)_{03} = d_0 - d_0(ad)_{03} + b_0 D(ab)_{03},$$

$$(14) \qquad c_3(bd)_{03} = d_3 - d_3(ad)_{03} + b_3 D(ab)_{03},$$

$$(19) \qquad d_1 = D\frac{b_1 b_3}{d_3},$$

$$(20) \qquad d_2 = D\frac{b_0 b_2}{d_0},$$

$$(21) \qquad a_1(bd)_{03} = -b_1 + b_1(ad)_{03} - \frac{D b_1 b_2}{d_3}(ab)_{03},$$

$$(22) \qquad a_2(bd)_{03} = -b_2 + b_2(ad)_{03} - \frac{D b_0 b_2}{d_0}(ab)_{03},$$

$$c_1 = -\frac{a_3 b_1}{d_3} D, \tag{23}$$

$$c_2 = -\frac{a_0 b_2}{d_0} D, \tag{24}$$

$$D = -\frac{d_0 d_3}{b_1 b_2}. \tag{25}$$

Tirons D de l'équation (25), portons sa valeur dans toutes les autres et portons dans l'équation (10) les valeurs de c_0, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, a_1, a_2. Nous trouvons, par un calcul qui n'a d'autre difficulté que sa longueur,

$$\frac{d_0}{b_1^2 b_2}(b_1^2 - d_3^2) = 0,$$

en supposant b_1 et b_2 différents de zéro, on en tire

$$b_1^2 = d_3^2, \tag{26}$$

et notre système d'équations, suivant que l'on prend

$$b_1 = d_3 \quad \text{ou} \quad b_1 = -d_3,$$

est équivalent à l'un ou à l'autre des deux systèmes suivants :

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{lll} c_0 = D a_2, & d_0 = -D b_2, & a_1(bd)_{03} = -d_3 + d_3(ad)_{03} + \dfrac{b_2 d_0}{b_2}(ab)_{03}, \\ c_1 = -D a_3, & d_1 = D b_3, & a_2(bd)_{03} = -b_2 + b_2(ad)_{03} + b_0(ab)_{03}, \\ c_2 = a_0, & d_2 = -b_0, & \\ c_3 = -a_1, & d_3 = b_1, & \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{lll} c_0 = -D a_2, & d_0 = D b_2, & a_1(bd)_{03} = d_3 - d_3(ad)_{03} + \dfrac{b_2 d_0}{b_2}(ab)_{03}, \\ c_1 = D a_3, & d_1 = -D b_3, & a_2(bd)_{03} = -b_2 + b_2(ad)_{03} - b_0(ab)_{03}, \\ c_2 = -a_0, & d_2 = b_0, & \\ c_3 = a_1, & d_3 = -b_1. & \end{array} \right.$$

Nous voyons donc, comme conclusion de ce calcul un peu long, il est vrai, mais très simple, qu'on exprime symétriquement les c et les d au moyen des a et des b liés encore par deux relations. Il est inutile d'aller plus loin et d'essayer d'utiliser ces deux relations pour faire disparaître deux coefficients; nous verrons plus loin une interprétation simple des deux relations restantes.

19. Des formules données au n° 16, nous tirons

$$\xi_1 = -\frac{\tau'_{12}+\sqrt{D}}{\tau'_{11}}, \qquad \eta_1 = \frac{\tau'_{12}-\sqrt{D}}{\tau'_{11}}.$$

Dans ces formules, remplaçons τ'_{11}, τ'_{12} par leurs valeurs en fonction de $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, puis $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ par leurs expressions en ξ et η; nous trouvons ainsi

$$\xi_1 = \frac{\alpha\xi\eta+\beta\xi+\gamma\eta+\delta}{\alpha''\xi\eta+\beta''\xi+\gamma''\eta+\delta''}, \qquad \eta_1 = \frac{\alpha'\xi\eta+\beta'\xi+\gamma'\eta+\delta'}{\alpha''\zeta\eta+\beta''\xi+\gamma''\eta+\delta''},$$

dans lesquelles, pour abréger l'écriture, on a posé

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha = D(ab)_{02} - \sqrt{D}(ad)_{02}, \\ 2\beta = \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} + (ad)_{03} - (ad)_{12}] - [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] - D[(ab)_{03} - (ab)_{12}], \\ 2\gamma = \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} - (ad)_{03} + (ad)_{12}] - [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] + D[(ab)_{03} - (ab)_{12}], \\ \delta = D(ab)_{13} - \sqrt{D}(ad)_{13}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha' = D(ab)_{02} + \sqrt{D}(ad)_{02}, \\ 2\beta' = \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} - (ad)_{03} + (ad)_{12}] + [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] - D[(ab)_{03} - (ab)_{12}], \\ 2\gamma' = \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} + (ad)_{03} - (ad)_{12}] + [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] + D[(ab)_{03} - (ab)_{12}], \\ \delta' = D(ab)_{13} + \sqrt{D}(ad)_{13}, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha'' = \sqrt{D}(bd)_{02}, \\ 2\beta'' = [(bd)_{01} + D(bd)_{23}] - \sqrt{D}\,[(bd)_{03} - (bd)_{12}], \\ 2\gamma'' = [(bd)_{01} + D(bd)_{23}] + \sqrt{D}\,[(bd)_{03} - (bd)_{12}], \\ \delta'' = \sqrt{D}(bd)_{13}. \end{cases}$$

Si les expressions de ξ_1, η_1 sont linéaires en ξ et η, comme M. Picard l'a démontré, elles contiennent nécessairement au numérateur et au dénominateur un facteur commun. Si donc on multiplie le dénominateur par α'', il s'écrit

$$\alpha''\xi(\alpha''\eta+\beta'') + \alpha''(\gamma''\eta+\delta'')$$

ou

$$\alpha''\eta(\alpha''\xi+\gamma'') + \alpha''(\beta''\xi+\delta'')$$

et l'on doit avoir

$$\alpha''\delta'' = \beta''\gamma'',$$

moyennant quoi on peut l'écrire

$$(\alpha''\eta+\beta'')(\alpha''\eta+\gamma'').$$

Si donc on vérifie que l'on a $\alpha''\delta'' = \beta''\gamma''$, on aura trouvé par là même les facteurs. Des procédés analogues donneront les facteurs des deux numérateurs. On vérifie, en effet, sans peine que l'on a bien

$$\alpha\delta = \beta\gamma, \qquad \alpha'\delta' = \beta'\gamma', \qquad \alpha''\delta'' = \beta''\gamma'',$$

et l'on trouve que les numérateurs et le dénominateur peuvent s'écrire

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\xi + \gamma)(\alpha\eta + \beta),$$

$$\frac{1}{\alpha'}(\alpha'\xi + \gamma')(\alpha'\eta + \beta'),$$

$$\frac{1}{\alpha''}(\alpha''\xi + \gamma'')(\alpha''\eta + \beta'').$$

Si nous portons maintenant dans les $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ les valeurs a_i, b_i, c_i, d_i, tirées des systèmes (I) ou (II), nous trouvons respectivement les formules suivantes, conclusion de tout ce calcul,

$$\text{(A)} \quad \xi_1 = \frac{(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi + (b_1 + b_3\sqrt{D})}, \qquad \eta_1 = \frac{(a_0 + a_2\sqrt{D})\eta + (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(b_0 + b_2\sqrt{D})\eta + (b_1 - b_3\sqrt{D})},$$

$$\text{(B)} \quad \xi_1 = -\frac{(a_0 + a_2\sqrt{D})\eta + (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(b_0 + b_2\sqrt{D})\eta + (b_1 - b_3\sqrt{D})}, \qquad \eta_1 = \frac{(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi - (b_1 + b_3\sqrt{D})}.$$

On voit, de plus, sans peine, que les deux relations qui existent dans chaque cas, entre les a et b, peuvent s'écrire

$$\text{(R)} \qquad (ab)_{01} - D(ab)_{23} = 1, \qquad (ab)_{12} + (ab)_{03} = 0,$$

$$\text{(S)} \qquad (ab)_{01} - D(ab)_{23} = -1, \qquad (ab)_{12} + (ab)_{03} = 0,$$

car ces relations ne sont autres, d'après leur origine, que les relations (1) et (3'), dans lesquelles on a porté les valeurs des coefficients, tirées des systèmes (I) ou (II). Remarquons qu'en formant les déterminants des substitutions que nous venons de trouver, on obtient pour (A),

$$\Delta_{\xi_1} = (ab)_{01} - D(ab)_{23} + \sqrt{D}[(ab)_{12} + (ab)_{03}],$$

$$\Delta_{\eta_1} = (ab)_{01} - D(ab)_{23} - \sqrt{D}[(ab)_{12} + (ab)_{03}],$$

et si l'on suppose maintenant que les coefficients de la transformation du premier ordre soient entiers et réels et que D soit un entier, réel, positif

et non carré, les conditions (R) expriment simplement que l'on a

$$\Delta_{\xi_1} = \Delta_{\eta_1} = +1.$$

On verrait de même que, pour la substitution (B), les conditions (S) expriment également que les deux déterminants sont égaux à $+1$.

Cette remarque nous dispense d'exprimer a_1 et a_2 en fonction des autres coefficients. Il suffit d'ajouter, comme on le fait d'habitude, que les substitutions que nous considérons, ont leurs déterminants égaux à l'unité positive.

Discontinuité du groupe.

20. Nous pouvons maintenant établir directement les propriétés de ces substitutions.

Pour les écrire sous une forme plus commode, convenons de désigner le nombre complexe $x + y\sqrt{D}$ par une seule lettre et le nombre conjugué $x - y\sqrt{D}$ par la même lettre affectée de l'indice o.

Moyennant cela, nos substitutions s'écrivent

$$\text{(A)} \qquad \xi_1 = \frac{a_0\xi - b}{-c_0\xi + d}, \qquad \eta_1 = \frac{a\eta + b_0}{c\eta + d_0},$$

$$\text{(B)} \qquad \xi_1 = -\frac{a\eta + b_0}{c\eta + d_0}, \qquad \eta_1 = \frac{a_0\xi - b}{c_0\xi - d}.$$

Considérons les substitutions (A); elles forment un groupe. En effet, l'inverse d'une pareille substitution est

$$\xi = \frac{d\xi_1 + b}{c_0\xi_1 + a_0}, \qquad \eta = \frac{d_0\eta_1 - b_0}{-c\eta_1 + a},$$

c'est-à-dire une substitution de la même forme.

De plus, formons le produit de deux substitutions de cette dernière forme; nous trouvons

$$\xi = \frac{d(d'\xi_2 + b') + b(c'_0\xi_2 + a'_0)}{c_0(d'\xi_2 + b') + a_0(c'_0\xi_2 + a'_0)}, \qquad \eta = \frac{d_0(d'_0\eta_2 - b'_0) - b_0(-c'\eta_2 + a'}{-c(d'_0\eta_2 - b'_0) + a(-c'\eta_2 + a')}$$

ou bien

$$\xi = \frac{D\eta_2 + B}{C_0\eta_2 + A_0}, \qquad \eta = \frac{D_0\eta_2 - B_0}{-C\eta_2 + A},$$

avec les valeurs

$$\begin{aligned} A &= cb'_0 + aa', \\ B &= db' + ba'_0, \\ C &= cd'_0 + ac', \\ D &= dd' + bc'_0. \end{aligned}$$

Donc, les substitutions (A) forment bien un groupe.

Les substitutions (B) ne forment pas de groupe, car le produit de deux telles substitutions est manifestement une substitution (A). Il faut, toutefois, mettre de côté le cas où le groupe ne contiendrait qu'une seule substitution (B). L'ensemble des substitutions (A) et (B) forme un groupe. Dans ce groupe total les substitutions (A) constituent un sous-groupe.

Considérons en particulier, dans le groupe total, la substitution unité et la substitution $(\xi, \eta; \eta, \xi)$, T. Toute substitution du groupe total S pourra s'écrire d'une seule manière, sous la forme

$$A.1 \quad \text{ou} \quad A.T,$$

A étant une substitution (A) selon qu'elle appartiendra au type (A) ou (B) de substitutions. De plus, A et A′ étant deux substitutions de la forme A, $A'.AA'^{-1}$ est encore une substitution de cette forme. Donc le sous-groupe constitué par les substitutions (A) est un sous-groupe invariant d'indice 2.

21. Nous allons faire voir de plus, que le groupe formé par ces substitutions est un groupe discontinu.

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer la discontinuité du groupe formé par les substitutions (A).

Considérons la substitution relative à ξ. Écrivons-la sous la forme homogène :

$$\begin{aligned} \rho(\xi'_1 + i\xi''_1) &= (a_0 - a_2\sqrt{D})(\xi' + i\xi'') - (a_1 + a_3\sqrt{D})(\omega' + i\omega''), \\ \rho(\omega'_1 + i\omega''_1) &= -(b_0 - b_2\sqrt{D})(\xi' + i\xi'') + (b_1 + b_3\sqrt{D})(\omega' + i\omega''), \end{aligned}$$

la variable ξ ayant été prise égale à $\dfrac{\xi' + i\xi''}{\omega' + i\omega''}$ et supposons que cette valeur soit telle que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi' + i\xi'' & \omega' + i\omega'' \\ \xi' - i\xi'' & \omega' - i\omega'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Dans le plan de la variable complexe ξ, décrivons autour de la valeur

précédente de ξ un cercle ne coupant pas l'axe des ξ réels. On peut toujours le faire.

Supposons, en outre, que le transformé $\xi_1 = \frac{\xi'_1 + i\xi''_1}{\omega'_1 + i\omega''_1}$ tombe à l'intérieur de ce cercle.

Cela étant, effectuons le produit

$$\begin{vmatrix} \xi' + i\xi'' & \omega' + i\omega'' \\ \xi' - i\xi'' & \omega' - i\omega'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 - a_2\sqrt{D} & -(a_1 + a_3\sqrt{D}) \\ -(b_0 - b_2\sqrt{D}) & b_1 + b_2\sqrt{D} \end{vmatrix};$$

comme le second déterminant est égal à 1, le produit est encore égal à Δ et, d'autre part, il est égal à

$$\rho\rho_0\Delta_1,$$

ρ_0 étant ici l'imaginaire conjuguée de ρ et Δ_1 le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \xi'_1 + i\xi''_1 & \omega'_1 + i\omega''_1 \\ \xi'_1 - i\xi''_1 & \omega'_1 - i\omega''_1 \end{vmatrix};$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta_1}(\xi_1'^2 + \xi_1''^2) = {} & [(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi' - (a_1 + a_3\sqrt{D})\omega']^2 \\ & + [(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi'' - (a_1 + a_3\sqrt{D})\omega'']^2 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta_1}(\omega_1'^2 + \omega_1''^2) = {} & [-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi' + (b_1 + b_3\sqrt{D})\omega']^2 \\ & + [-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi'' + (b_1 + b_3\sqrt{D})\omega'']^2. \end{aligned}$$

Comme le point $\frac{\xi'_1 + i\xi''_1}{\omega'_1 + i\omega''_1}$ est supposé à l'intérieur du cercle construit plus haut, $\left|\frac{\Delta_1}{\xi_1'^2 + \xi_1''^2}\right|$, $\left|\frac{\Delta_1}{\omega_1'^2 + \omega_1''^2}\right|$ ne peuvent dépasser certaines limites. Les premiers membres de ces relations étant limités, les seconds le sont et, par suite, chacune des parties élevées au carré est également limitée et, de plus, comme $\begin{vmatrix} \xi' & \omega' \\ \xi'' & \omega'' \end{vmatrix}$ ne diffère de Δ que par un facteur, on en conclut que les quantités

$$(1) \qquad |a_0 - a_2\sqrt{D}|, \quad |a_1 + a_3\sqrt{D}|, \quad |b_0 - b_2\sqrt{D}|, \quad |b_1 + b_3\sqrt{D}|$$

sont limitées.

Des considérations analogues appliquées à la substitution sur η montrent que les quantités

$$(2) \qquad |a_0 + a_2\sqrt{D}|, \quad |a_1 - a_3\sqrt{D}|, \quad |b_0 - b_2\sqrt{D}|, \quad |b_1 - b_3\sqrt{D}|$$

sont limitées.

Comme, maintenant, parmi les huit quantités (1) et (2), il y a certainement quatre sommes véritables, quels que soient les signes des a et des b, on en conclut que les modules des coefficients :

$$|a_0|, \quad |a_1|, \quad |a_2|, \quad |a_3|, \qquad |b_0|, \quad |b_1|, \quad |b_2|, \quad |b_3|$$

sont limités.

Donc, en résumé, si l'on applique à ξ et à η, *simultanément* les substitutions du groupe A, il n'y a qu'un nombre limité de points transformés d'un point donné à l'intérieur d'un domaine composé de deux cercles de rayon fini tracés autour de ξ et de η et ne coupant pas l'axe des quantités réelles. Donc, le groupe formé par les substitutions (A) est discontinu, résultat trouvé autrement par M. Picard.

Remarquons que, si l'on applique *séparément* et *indépendamment* l'une de l'autre, les deux substitutions sur ξ et sur η, on n'est plus conduit à la même conclusion. Les substitutions sur ξ, d'une part, sur η, d'autre part, engendrent des groupes continus.

Cette remarque est en défaut si D est un carré parfait; dans ce cas, les deux substitutions deviennent à coefficients entiers et le groupe résulte de la substitution de deux groupes modulaires.

Substitutions fondamentales du groupe.

22. Nous nous proposons maintenant de réduire les substitutions (A), de manière à obtenir un système de substitutions fondamentales du groupe.

On est naturellement conduit à essayer une méthode analogue à celle employée pour réduire le groupe modulaire; mais nous avons ici à calculer sur des nombres complexes de la forme

$$a + b\sqrt{D}, \qquad D > 0,$$

et l'on sait que l'algorithme d'Euclide ne s'applique plus sans précautions et d'une manière générale. Il vaut donc mieux opérer autrement et faire la réduction sur le groupe de la transformation du premier ordre qui nous a servi de point de départ.

Nous avons vu qu'à toute transformation de la forme

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ Da_2 & -Da_3 & a_0 & -a_1 \\ -Db_2 & Db_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

correspondait *une* substitution, soit de la forme (A), soit de la forme (B), et il est clair qu'inversement à toute substitution (A) ou (B) correspondent *deux* substitutions linéaires à quatre variables, l'une se déduisant de l'autre en changant les signes des éléments.

En d'autres termes, les deux groupes sont *isomorphes mériédriquement.*

C'est le groupe des substitutions linéaires à quatre variables que nous allons réduire en appliquant une méthode de réduction déjà bien des fois employée.

Partons de la substitution suivante

$$S = \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & -b_3 & -a_3 \\ -b_0 & a_0 & -b_2 & -a_2 \\ -Db_3 & Da_3 & b_1 & a_1 \\ Db_2 & -Da_2 & b_0 & a_0 \end{vmatrix},$$

qui est l'inverse de celle que nous venons d'écrire.

Considérons les substitutions :

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a

$$U^q = \begin{vmatrix} 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V^q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 1 \end{vmatrix}.$$

On voit tout d'abord que les substitutions U, V, U^q, V^q font partie du groupe.

Cela étant, supposons qu'on ait $|a_0| > |b_0|$. Appliquons à S la substitution U^q; nous obtenons

$$SU^q = S' = \begin{vmatrix} b_1 & -(a_1 - qb_1) & -b_3 & -(a_3 - qb_3) \\ -b_0 & a_0 - qb_0 & -b_2 & -(a_2 - qb_2) \\ -Db_3 & D(a_3 - qb_3) & b_1 & a_1 - qb_1 \\ Db_2 & -D(a_2 - qb_2) & b_0 & a_0 - qb_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_1 & -a'_1 & -b'_3 & -a'_3 \\ -b'_0 & a'_0 & -b'_2 & -a'_2 \\ -Db'_3 & Da'_3 & b'_1 & a'_1 \\ b'_2 & -Da'_2 & b'_0 & a'_0 \end{vmatrix}$$

et déterminons q de manière à avoir

$$|a_0 - qb_0| \leqq \tfrac{1}{2}|b_0| \qquad \text{ou} \qquad |a'_0| \leqq \tfrac{1}{2}|b_0|,$$

ce qui est toujours possible. Nous aurons de la sorte une substitution S′ où l'on aura

$$|a'_0| < |b'_0|.$$

Appliquons à S′ la substitution $V^{q'}$, en déterminant q' de manière à avoir

$$|b'_0 - q'a'_0| \leqq \tfrac{1}{2}|a'_0| \qquad \text{ou} \qquad |b''_0| \leqq \tfrac{1}{2}|a''_0|.$$

On sera ainsi conduit à une substitution S″ telle que l'on ait

$$|a''_0| > |b''_0|.$$

On appliquera de nouveau à S″ une puissance convenable de U et ainsi de suite; en alternant l'emploi des substitutions U et V, on sera sûrement conduit, après un nombre fini d'opérations, à une substitution du groupe dans laquelle a_0 ou b_0 sera nul. On traitera de la même manière les termes a_1, b_1, puis a_2, b_2 et enfin a_3, b_3; de sorte qu'après un nombre fini d'opérations, on sera conduit à un des seize types suivants possibles *a priori*. (Nous n'écrivons, pour abréger, que les deux dernières colonnes de ces substitutions.)

$$\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix};$$

(1) (2) (3) (4) (5)

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix},$$

(1′) (2′) (3′) (4′) (5′)

$$\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}.$$

(6) (7) (8) (6′) (7′) (8′)

Il reste à examiner si des substitutions de cette nature peuvent satisfaire aux conditions

$$(R)\qquad \begin{cases} (ab)_{01} - D(ab)_{23} = 1, \\ (ab)_{12} + \ \ (ab)_{03} = 0, \end{cases}$$

ce qui va déterminer les valeurs des α et β.

23. Remarquons qu'on peut éliminer (1) et (1') sans examen, car leur déterminant est nul. En outre, nous voyons qu'on passe d'une substitution à numéro d'ordre non accentué à la substitution de même numéro accentué, en appliquant la substitution du groupe

$$W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Il nous reste à examiner à part les sept types (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8).

Type (2).

$$(R)\qquad \begin{cases} \beta_1\alpha_0 = 1, \\ \beta_3\alpha_0 = 0, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \beta_3 = 0, \quad \alpha_0 = \pm 1, \quad \beta_1 = \pm 1;$$

elle est donc

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ -D\beta_2 & 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix}.$$

Type (3).

$$(R)\qquad \begin{cases} -\alpha_1\beta_0 = 1, \\ \alpha_1\beta_2 = 0, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_0 = \pm 1, \quad \alpha_1 = \mp 1;$$

elle devient

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \pm 1 & \beta_3 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ D\beta_3 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{vmatrix},$$

Type (4).

$$(R) \qquad \begin{cases} -D\alpha_2\beta_3 = 1, & \text{d'où} \quad D = \pm 1, \\ \beta_1\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Elle est donc à rejeter.

Type (5).

$$(R) \qquad \begin{cases} D\beta_2\alpha_3 = 1, \\ \beta_0\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

elle est à rejeter pour les mêmes raisons que la précédente.

Type (6).

$$(R) \qquad \begin{cases} 0 = 1, \\ \beta_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_0 = 0, \end{cases}$$

elle est à rejeter.

Type (7).

$$(R) \qquad \begin{cases} \beta_1\alpha_0 - D\beta_3\alpha_2 = 1, \\ \beta_1\alpha_2 = \beta_3\alpha_0. \end{cases}$$

On en tire $\beta_1 = \rho\alpha_0$, $\beta_3 = \rho\alpha_2$ et $\rho(\alpha_0^2 - D\alpha_2^2) = 1$. Mais le déterminant est $\rho^2(\alpha_0^2 - D\alpha_2^2)^2$; donc on en conclut $\rho = \pm 1$: par suite

$$\beta_1 = \pm\alpha_0, \qquad \beta_3 = \pm\alpha_2 \qquad \text{avec} \qquad \alpha_0^2 - D\alpha_2^2 = \pm 1.$$

La substitution peut donc s'écrire

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \pm\alpha_0 & 0 & \pm\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2 \\ \pm D\alpha_2 & 0 & \pm\alpha_0 & 0 \\ 0 & D\alpha_2 & 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}$$

avec

$$\alpha_0^2 - D\alpha_2^2 = \pm 1.$$

On doit toujours prendre le signe $+$, car autrement le déterminant de la substitution semblable serait -1.

Type (8).

$$(R) \qquad \begin{cases} \beta_1\alpha_0 + D\beta_2\alpha_3 = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Elle est à garder.

24. Nous pouvons aller plus loin.

Si, dans la substitution du type (2), nous prenons le signe +, nous voyons qu'elle peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\beta_1},$$

et si l'on prend le signe —, on a la décomposition

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\beta_1 - 1},$$

Donc, en définitive, la substitution (2) se ramène aux deux suivantes et à leurs inverses

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

De même, dans la substitution du type (3), en prenant successivement les signes + et —, on a les décompositions, aisées à vérifier,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\beta_1},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

de sorte que le type (3) se réduit aux substitutions déjà trouvées et aux deux précédentes et à leurs inverses.

Nous voyons donc que nos substitutions peuvent se former en composant

entre elles et avec (7) et (8) les substitutions suivantes et leurs inverses

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Or, il est aisé de voir que ces substitutions ne sont pas indépendantes et que l'on a

$$UW^{-1}U = V,$$

puis

$$W^4 = 1,$$
$$CA^{-1} = W,$$
$$CB = W^{-1},$$
$$DA = W^{-1},$$
$$AB = W^2,$$
$$AB = BA,$$

d'où nous tirons

$$V = UW^{-1}U,$$
$$A = W^{-1}C,$$
$$B = C^{-1}W^{-1},$$
$$D = W^{-1}C^{-1}W$$

et

$$C^{-1}W^2CW^2 = 1.$$

Donc il suffit de considérer les substitutions U, W, C et (7) et (8), qui ne comprennent pas d'ailleurs U, W, C comme cas particuliers.

25. Si nous formons maintenant les substitutions de la forme (A) correspondantes, nous trouvons les résultats suivants :

à U correspond la substitution

$$(\xi,\ \eta;\ \xi+1,\ \eta-1).$$

à W correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\eta}\right),$$

et à C correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{-1}{\xi+\sqrt{D}},\ \frac{-1}{\eta+\sqrt{D}}\right),$$

à la substitution (7) correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ \pm\frac{\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}\xi,\ \pm\frac{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D}}\eta\right),$$

mais

$$\pm\frac{\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}=(\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D})^2,\qquad \pm\frac{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}=(\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D})^2;$$

comme, d'autre part, on obtient toutes les solutions de l'équation de Pell en employant l'identité

$$x\pm y\sqrt{D}=(a\pm c\sqrt{D})^n \qquad (n \text{ q. c. q. entier}),$$

a et c désignant les plus petites solutions entières, on en conclut que la substitution (7) revient à la suivante

$$[\xi,\ \eta;\ (a+c\sqrt{D})\xi,\ (a-c\sqrt{D})\eta].$$

Enfin, à la substitution (8) correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{\alpha_0\xi+\alpha_3\sqrt{D}}{-\beta_2\sqrt{D}\xi+\beta_1},\ \frac{\alpha_0\eta+\alpha_3\sqrt{D}}{-\beta_2\sqrt{D}\eta+\beta_1}\right)$$

avec la condition

$$\alpha_0\beta_1+\alpha_2\beta_2 D=1,$$

qui exprime que le déterminant est égal à $+1$.

Sous cette forme, une réduction nous apparaît encore; multiplions, en effet, notre substitution par la suivante,

$$(a)\qquad \begin{vmatrix} 1 & -m\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

qui est de la forme (8) et supposons $|\alpha_3| > |\alpha_0|$; nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & (\alpha_3 - m\alpha_0)\sqrt{D} \\ -\beta_2\sqrt{D} & Dm\beta_2 + \beta_1 \end{vmatrix}$$

et choisissons m de manière que l'on ait

$$|\alpha_3 - m\alpha_0| \leqq \tfrac{1}{2}|\alpha_0|;$$

la substitution devient

$$\begin{vmatrix} \alpha'_0 & \alpha'_3\sqrt{D} \\ -\beta'_2\sqrt{D} & \beta'_1 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad |\alpha'_3| < |\alpha'_0|.$$

Appliquons à cette dernière la substitution

$$(b) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m'\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix},$$

en déterminant m' par la condition

$$|\alpha'_0 - m'\alpha'_3| \leqq \tfrac{1}{2}|\alpha'_3|,$$

et ainsi de suite; appliquons alternativement les substitutions (a) et (b); nous arriverons, après un nombre fini d'opérations, à l'un ou à l'autre des deux types,

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3^{(n)}\sqrt{D} \\ -\beta_2^{(n)}\sqrt{D} & \beta_1^{(n)} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_0^{(n)} & 0 \\ -\beta_2^{(n)}\sqrt{D} & \beta_1^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Le premier est à rejeter, comme donnant $D = \pm 1$; quant au second, il donne immédiatement $\alpha_0^{(n)} = \pm 1$ et $\beta_1^{(n)} = \pm 1$; de sorte que nous avons, pour obtenir la substitution correspondant à (8), à composer les trois suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & -m\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -m\sqrt{D} & -1 \end{vmatrix}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\begin{vmatrix} 1 & -m\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^m,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix}^m,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -m\sqrt{D} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{D} & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix}^{-(m-1)},$$

c'est-à-dire qu'on est ramené aux trois suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad (\xi, \eta; \xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\xi, \eta; \frac{\xi}{-\sqrt{D}\xi + 1}, \frac{\eta}{-\sqrt{D}\eta + 1}\right),$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{D} & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\xi, \eta; \frac{\xi}{\sqrt{D}\xi + 1}, \frac{\eta}{\sqrt{D}\eta + 1}\right),$$

de sorte qu'en définitive, le groupe résulte des substitutions suivantes

$$(\xi, \eta; \xi + 1, \eta - 1),$$
$$\left(\xi, \eta; -\frac{1}{\xi}, -\frac{1}{\eta}\right),$$
$$(\xi, \eta; \xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}),$$
$$[\xi, \eta; (a - c\sqrt{D})\xi, (a + c\sqrt{D})\eta] \quad \text{avec} \quad a^2 - c^2 D = 1,$$

auxquelles il faut ajouter, si l'on veut comprendre le groupe total des substitutions (A) et (B)

$$(\xi, \eta; \eta, \xi).$$

Nous poserons, pour abréger le langage dans la suite,

$$\alpha = (\xi, \eta; \xi + 1, \eta - 1),$$
$$\beta = (\xi, \eta; \xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}),$$
$$\gamma = \left(\xi, \eta; -\frac{1}{\xi}, -\frac{1}{\eta}\right),$$
$$\delta = [\xi, \eta; (a + c\sqrt{D})\xi, (a - c\sqrt{D})\eta], \quad a^2 - Dc^2 = 1,$$
$$\varepsilon = (\xi, \eta; \eta, \xi).$$

Remarquons, en passant, que nous démontrons un résultat énoncé par M. Picard dans son Mémoire couronné *Sur les fonctions de deux variables*, à savoir qu'on obtient un groupe discontinu de substitutions entières, en prenant le groupe admettant pour substitutions fondamentales

$$\alpha, \beta, \delta.$$

Recherche des substitutions du groupe, considérées comme substitutions semblables d'une forme quadratique.

26. Nous avons défini le groupe que nous étudions en montrant sa liaison analytique avec le groupe des transformations du premier ordre

d'un système de fonctions abéliennes de genre deux, dans lequel on a

$$\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22} = D.$$

Dans le courant du long calcul d'élimination qui nous a donné la forme des substitutions, nous avons fait quelques restrictions. Il n'est donc pas inutile de montrer qu'on peut retrouver les mêmes formules en cherchant comment on doit choisir les coefficients des substitutions

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\xi + b}{c\xi + d},\ \frac{l\eta + m}{p\eta + q}\right),$$

pour que les substitutions correspondantes qui reproduisent la forme

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4$$

aient tous leurs coefficients entiers.

27. A cet effet, commençons par remarquer que, dans les formules du n° 6, si l'on change $+\sqrt{D}$ en $-\sqrt{D}$, ξ et η deviennent respectivement $-\eta$, $-\xi$ et, en second lieu, que toute transformation semblable de la forme

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4$$

n'est pas entière si ξ et η ne contiennent pas $\sqrt{D}$.

Cela étant, considérons les systèmes de valeurs (ξ, η), (ξ', η') correspondant respectivement aux systèmes (u_1, u_2, u_3, u_4), (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) et supposons que les (u_i) soient des nombres entiers et que les (u'_i) leur correspondent par une substitution à coefficients entiers; on aura les relations

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + q}, \qquad \eta' = \frac{l\eta + m}{p\eta + q},$$

dans lesquelles les $a, b, \ldots, q$ contiennent $\sqrt{D}$. Changeons, dans la première de ces formules, $\sqrt{D}$ en $-\sqrt{D}$; elle devient

$$-\eta' = \frac{-a_0\eta + b_0}{-c_0\eta + d_0} \qquad \text{ou} \qquad \eta' = \frac{a_0\eta - b_0}{-c_0\eta + d_0},$$

où $a_0, \ldots$ désignent les nombres conjugués en $\sqrt{D}$ de $a, \ldots$. Comme les points (u) et (u') n'ont pas bougé dans cette transformation, la dernière

formule doit être identique à

$$\eta' = \frac{l\eta + m}{p\eta + q},$$

ce qui entraîne les conditions

$$\frac{l}{a_0} = \frac{m}{-b_0} = \frac{p}{c_0} = \frac{q}{d_0},$$

d'où l'on tire

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \qquad \eta' = \frac{a_0\eta - b_0}{-c_0\eta + d_0}.$$

Telle est donc la forme nécessaire de toute substitution correspondant à une substitution entière sur les u_i. On constate d'ailleurs aisément que toute substitution de cette forme correspond à une substitution à coefficients entiers. D'autre part, c'est, aux notations près, précisément la forme des substitutions (A).

28. Nous avons donc le droit d'utiliser, pour notre groupe, les considérations développées dans les premiers paragraphes de ce travail.

Nous passerons des substitutions de la forme (A) ou (B) aux substitutions linéaires sur les u_i, au moyen des formules du n° 6.

A ces dernières substitutions correspondent des substitutions sur x, y, z qui peuvent représenter des transformations isogonales non euclidiennes, dans un espace où la conique à l'infini aurait pour équations

$$t = 0, \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Pour trouver ces transformations isogonales, il faut commencer par passer de la forme quadratique, considérée jusqu'ici,

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4,$$

à la forme canonique

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2,$$

ce qui se fait au moyen de la substitution

$$\begin{array}{c|c} u_1 & u_1, \\ u_2 & \dfrac{u_2}{\sqrt{D}}, \\ u_3 & u_3 + u_4, \\ u_4 & u_3 - u_4. \end{array}$$

Cela fait, on appliquera les formules qui donnent la représentation, dans

l'espace à trois dimensions $u_1 = 0$, de la quadrique

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = 1,$$

le point de vue étant le point $(1, 0, 0, 0)$. Ces formules sont

$$x = \frac{u_3}{1 - u_1},$$

$$y = \frac{u_2}{1 - u_1},$$

$$z = \frac{u_4}{1 - u_1},$$

ou bien

$$u_1 = \frac{x^2 - y^2 - z^2 - 1}{x^2 - y^2 - z^2 + 1},$$

$$u_2 = \frac{2y}{x^2 - y^2 - z^2 + 1},$$

$$u_3 = \frac{2x}{x^2 - y^2 - z^2 + 1},$$

$$u_4 = \frac{2z}{x^2 - y^2 - z^2 + 1}.$$

La quadrique conservée par les transformations isogonales non euclidiennes sera la sphère non euclidienne

$$x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Nous avons fait observer au n° 3 qu'on pouvait faire en sorte que les transformations isogonales laissent invariable un plan. Il suffit de transformer toutes les substitutions trouvées par la substitution

$$\begin{array}{c|c} x & \dfrac{-2x}{x^2 - y^2 - (z+1)^2}, \\ y & \dfrac{-2y}{x^2 - y^2 - (z+1)^2}, \\ z+1 & \dfrac{-2(z+1)}{x^2 - y^2 - (z+1)^2}, \end{array}$$

qui change la quadrique $x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$ dans le plan $z = 0$. Cette substitution n'est autre qu'une inversion par rapport à la sphère non euclidienne

$$x^2 - y^2 - (z+1)^2 + 2 = 0.$$

Nous pourrons donc avoir finalement les transformations isogonales non

euclidiennes conservant un plan réel, qui correspondent à des substitutions données sur les ξ et η.

En particulier, si nous considérons les substitutions (B) à période *deux*, c'est-à-dire de la forme

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\eta+b}{c\eta+d},\ \frac{-d\xi+b}{c\xi-a}\right),$$

il leur correspond sur les u_i une substitution à période 2, c'est-à-dire une homologie harmonique, le plan d'homologie étant

$$-(a+d)u_1-(a-d)u_2+(b-c)u_3+(b+c)u_4=0.$$

Les transformations isogonales non euclidiennes correspondantes sont des inversions non euclidiennes ou des réflexions sur les sphères transformées de ces plans. Ces sphères (qui sont des plans passant par l'origine si $a+d=0$) sont orthogonales au sens non euclidien, à la sphère non euclidienne

$$x^2-y^2-z^2+1=0.$$

Par suite, enfin, dans les transformées de ces substitutions isogonales, les homologies harmoniques correspondent à des réflexions sur des sphères non euclidiennes, toutes orthogonales au sens non euclidien au plan $z=0$.

On sait, et il n'est pas difficile de le voir, que si l'on peut former un polyèdre à faces sphériques tel qu'il ne soit traversé par aucune autre sphère de réflexion du groupe, ce polyèdre peut constituer le domaine fondamental du groupe (ou d'un de ses sous-groupes d'indice fini) à condition que les réflexions successives de ce polyèdre sur ses faces remplissent sans vides ni empiètement l'espace entier.

Dans le cas où D est quelconque, ce domaine fondamental paraît difficile à construire et nos recherches sur ce sujet n'ont pas abouti. Il semble y avoir là une variété de cas particuliers aussi grande que celle que M. Bianchi a rencontrée dans l'étude du cas voisin des transformations semblables d'une forme quadratique quaternaire réductible au type

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2 \quad (^1).$$

---

(1) *Ann. di Mat.*, t. XXI et XIII.

Particularités du domaine fondamental du groupe déduites de la réduction continuelle.

29. Essayons maintenant d'appliquer à la forme quadratique qui nous intéresse l'algorithme de la réduction continuelle et de voir quels renseignements nous pouvons en tirer relativement au domaine fondamental du groupe.

Ce que nous avons dit sur les réduites à la fin de la première Partie de ce Travail nous conduit à envisager, à la place de la forme

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4,$$

la forme

$$u_3^2 - D u_4^2 + u_1 u_4,$$

dans laquelle

$$a_1 = 0, \qquad b_{12} = 0, \qquad b_{13} = 0,$$

et qui peut, par suite, avoir un point commun avec la limite du domaine S.

Si nous calculons, pour cette forme, les coefficients de la forme définie associée, nous trouvons sans peine

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2,\\
A_2 &= D[2\xi\xi_0 + 2\eta\eta_0 + (\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0)],\\
A_3 &= 2\xi\xi_0 + 2\eta\eta_0 - (\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0),\\
A_4 &= 2\xi\xi_0\eta\eta_0,\\
B_{12} &= -\sqrt{D}(\xi+\xi_0+\eta+\eta_0),\\
B_{13} &= \xi+\xi_0-\eta-\eta_0,\\
B_{14} &= \tfrac{1}{2}(\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0),\\
B_{23} &= -2\sqrt{D}(\xi\xi_0-\eta\eta_0),\\
B_{24} &= -\sqrt{D}[\xi\xi_0(\eta+\eta_0)+\eta\eta_0(\xi+\xi_0)],\\
B_{34} &= [\xi\xi_0(\eta+\eta_0)-\eta\eta_0(\xi+\xi_0)].
\end{aligned}$$

Si nous mettons cette forme définie

$$(A_1, A_2, A_3, A_4; B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{23}, B_{24}, B_{34})$$

sous la forme de MM. Korkine et Zolotareff, il vient, par des calculs qui

n'ont d'autre difficulté que leur longueur,

$$\varepsilon_1 = -\frac{\sqrt{D}}{2}(\xi + \xi_0 + \eta + \eta_0), \qquad \mu_1 = 2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\xi + \xi_0 - \eta - \eta_0), \qquad \mu_2 = -\frac{D}{2}[(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{4}(\xi + \xi_0)(\eta + \eta_0), \qquad \mu_3 = -2\frac{(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2}{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{(\xi_0 - \xi)^2 - (\eta - \eta_0)^2}{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2}, \qquad \mu_4 = \frac{1}{2}(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2,$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}\frac{(\eta + \eta_0)(\xi_0 - \xi)^2 + (\xi + \xi_0)(\eta - \eta_0)^2}{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_6 = -\frac{1}{4}(\xi + \xi_0 - \eta - \eta_0);$$

on en tire

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{D}{4}[(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2],$$

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{4}{D}\frac{(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2}{[(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2]^2},$$

$$\frac{\mu_4}{\mu_3} = -\frac{1}{4}[(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2].$$

Comme on doit avoir, pour que la forme soit réduite, $\frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \frac{1}{2}$, on en conclut

$$\frac{4}{D}\frac{(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2}{[(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2]^2} \geqq \frac{1}{2};$$

mais, d'autre part, on a, pour toutes les valeurs de ξ, η,

$$4\frac{(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2}{[(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2]^2} < 1;$$

on devrait donc avoir

$$\frac{D}{2} \leqq 1 \qquad \text{ou} \qquad D \leqq 2,$$

ce qui n'arrive pas en général; donc la forme dont on est parti

$$u_3^2 - D u_2^2 + x_1 x_4$$

n'est réduite pour aucune valeur de ξ, η, ce qui nous montre en passant que *les conditions du n° 14 ne sont pas suffisantes*. Si on veut la réduire, il faut faire une substitution linéaire qui change en quelque manière les quan-

tités μ_i, ce qui est mal commode, et nous sommes conduit à changer de forme de départ.

30. Faisons dans f la substitution

$$\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1,\ \frac{x_2}{\sqrt{D}},\ x_3\sqrt{D},\ x_4\right);$$

la forme devient

$$Dx_3^2 - x_2^2 + x_1x_4 = -(x_2^2 - Dx_3^2 - x_1x_4) = -\varphi,$$

ce qui montre qu'on obtient $-\varphi$ en faisant dans f la substitution entière de déterminant $+1$

$$T = (x_1, x_2, x_3, x_4; x_1, x_3, x_2, -x_4).$$

A toute substitution semblable S de φ correspond une substitution semblable TST^{-1} de f et inversement à toute substitution semblable de f, Σ, correspond la substitution semblable de φ, $T^{-1}\Sigma T$.

Donc, au point de vue de notre groupe, nous pouvons raisonner sur la forme φ. Or, si nous faisons la première substitution qui nous a donné $-\varphi$ sur f, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mu_1\left(x_1 + \varepsilon_1\frac{x_2}{\sqrt{D}} + \varepsilon_2\sqrt{D}x_3 + \varepsilon_3x_4\right)^2\\
&\quad + \mu_2\left(\frac{x_2}{\sqrt{D}} + \varepsilon_4\sqrt{D}x_3 + \varepsilon_5x_4\right)^2\\
&\qquad + \mu_3(x_3\sqrt{D} + \varepsilon_6x_4)^2\\
&\qquad\qquad + \mu_4x_4^2,
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
-\varphi = {}&\mu_1\left(x_1 + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{D}}x_2 + \varepsilon_2\sqrt{D}x_3 + \varepsilon_3x_4\right)^2\\
&+ \frac{\mu_2}{\sqrt{D}}(x_2 + \varepsilon_4Dx_3 + \varepsilon_5\sqrt{D}x_4)^2\\
&\quad + \mu_3D\left(x_3 + \frac{\varepsilon_6}{\sqrt{D}}x_4\right)^2\\
&\qquad + \mu_4x_4^2,
\end{aligned}$$

et il se trouve que les nouvelles valeurs des coefficients μ_i sont encore entières.

Or, pour cette dernière forme φ, nous avons les coefficients

$$\varepsilon_1 = -\tfrac{1}{2}(\xi + \xi_0 + \eta + \eta_0), \qquad \mu_1 = -2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{D}}{2}(\xi + \xi_0 - \eta - \eta_0), \qquad \mu_2 = \frac{1}{2}[(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{4}(\xi + \xi_0)(\eta + \eta_0), \qquad \mu_3 = 2D\frac{(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2}{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_4 = -\sqrt{D}\frac{(\xi_0 - \xi)^2 - (\eta - \eta_0)^2}{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2}, \qquad \mu_4 = -\frac{1}{2}(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2,$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{1}{2}\frac{(\eta + \eta_0)(\xi_0 - \xi)^2 + (\xi + \xi_0)(\eta - \eta_0)^2}{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta - \eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_6 = -\frac{1}{4\sqrt{D}}(\xi + \xi_0 - \eta - \eta_0),$$

expressions qui se simplifient en posant

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2,$$
$$\eta = \eta_1 + i\eta_2,$$

et qui deviennent

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1), \qquad \frac{\mu_2}{\mu_1} = \xi_2^2 + \eta_2^2,$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1), \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} = 4D\frac{\xi_2^2\eta_2^2}{(\xi_2^2 + \eta_2^2)^2},$$

$$\varepsilon_3 = \xi_1\eta_1, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} = \frac{1}{D}(\xi_2^2 + \eta_2^2),$$

$$\varepsilon_4 = -\sqrt{D}\frac{\xi_2^2 - \eta_2^2}{\xi_2^2 + \eta_2^2},$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{\eta_1\xi_2^2 + \xi_1\eta_2^2}{\xi_2^2 + \eta_2^2},$$

$$\varepsilon_6 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}(\xi_1 - \eta_1).$$

31. Le problème qui va nous occuper est donc la réduction continuelle de la forme

$$x_2^2 - Dx_3^2 - x_1x_4.$$

Remarquons avant tout qu'il y a des valeurs de ξ_2, η_2 aussi grandes qu'on veut qui satisfont aux conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} \geqq \frac{1}{2}$$

pour la première et la dernière inégalité; le fait est évident. Pour la seconde, il suffit de choisir une valeur de $\zeta^2 = \left(\frac{\xi_2}{\eta_2}\right)^2$ qui satisfasse à l'inégalité

$$\zeta^4 + (2 - 8D)\zeta^2 + 1 < 0;$$

il faut donc que ξ_2^2 et η_2^2 croissent sans limite de façon que leur rapport ζ^2 soit compris entre les racines de l'équation

$$X^2 - 2(4D - 1)X + 1 = 0,$$

racines qui sont toujours réelles et égales à

$$4D - 1 \pm 2\sqrt{2D(2D-1)}.$$

Remarquons également que de pareilles valeurs infiniment grandes de ξ_2 et η_2 sont compatibles avec la condition

$$|\varepsilon_4| < \tfrac{1}{2}$$

ou

$$-\frac{1}{2} < \sqrt{D}\frac{\eta_2^2 - \xi_2^2}{\eta_2^2 + \xi_2^2} < \frac{1}{2},$$

ou bien

$$-\frac{1}{2} < \sqrt{D}\frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} < \frac{1}{2},$$

car cette dernière exige que l'on ait

$$\frac{2\sqrt{D} - 1}{2\sqrt{D} + 1} < \zeta^2 < \frac{2\sqrt{D} + 1}{2\sqrt{D} - 1};$$

or ces deux limites de ζ^2 sont comprises dans l'intervalle des racines de l'équation ci-dessus en X.

Donc notre assertion est confirmée; il y a des valeurs infiniment grandes de ξ_2 et η_2 satisfaisant aux inégalités de la réduction en ce qui concerne les nombres μ_i et $|\varepsilon_4| < \frac{1}{2}$.

Ceci nous montre que le domaine D de réduction a un point commun avec la limite du domaine S à l'infini qui est entièrement analogue au point à l'infini du domaine fondamental du groupe modulaire. Il résulte de cette analyse qu'il ne peut avoir que ce point commun.

Enfin, remarquons encore que, sauf les conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} \geqq \frac{1}{2},$$

toutes les autres conditions de la réduction ne dépendent que des variables

$$\xi_1, \qquad \eta_1, \qquad \zeta = \frac{\xi_2}{\eta_2},$$

car on a

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = 4D\frac{\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2},$$

$$\varepsilon_4 = +\sqrt{D}\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2},$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{\eta_1\zeta^2 + \xi_1}{1+\zeta^2}.$$

Il résulte de là la conséquence importante que, si nous réduisons la forme en supposant les conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} \geqq \frac{1}{2},$$

toujours satisfaites pour le point variable $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$, nous n'avons en définitive que trois paramètres ξ_1, η_1, ζ^2; fait analytique qui nous dispense d'employer l'espace à quatre dimensions comme espace représentatif de la réduction continuelle et nous permet de rester dans un espace à trois dimensions.

C'est un fait analogue au fait qui se passe dans le groupe modulaire. Si l'on est en dehors du cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$ suffisamment loin de l'origine, le domaine fondamental est une bande parallèle à Oy et, par suite, les limitations de ce domaine ne dépendent pas de la variable y.

32. Toutes ces remarques étant faites, voici comment nous allons faire la réduction continuelle.

Nous allons supposer que ξ_2 et η_2 sont infiniment grands et de telle sorte que leur rapport $\frac{\xi_2}{\eta_2} = \zeta$ et elles-mêmes satisfassent toujours aux conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} > \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} > \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} > \frac{1}{2},$$

et nous allons faire varier ξ_1, η_1, ζ de toutes les manières possibles. En d'autres termes, nous ne réduisons la forme que pour les valeurs de $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ avoisinant le point à l'infini du domaine S, et nous allons chercher toutes les réduites dont les domaines de réduction admettent ce point.

Nous donnerons une valeur fixe à ζ et nous réduirons la forme pour

toutes les valeurs de ξ_1 et η_1. Nous obtiendrons ainsi une division régulière du plan des ξ_1 et η_1. Nous ferons ensuite varier ζ dans les limites où il peut varier et nous verrons comment se déforme cette division régulière dans l'espace à trois dimensions (ξ_1, η_1, ζ).

33. Commençons par le cas très simple où $\zeta^2 = 1$; on a alors comme conditions de réduction de la forme

$$f_0 = x_2^2 - D x_3^2 - x_1 x_4,$$

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2} &< -(\xi_1 + \eta_1) &&< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) &&< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \xi_1 \eta_1 &&< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2} &&< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}} &&< \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

qui nous montrent que la forme est réduite dans le rectangle dont les côtés ont pour équations

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}, \qquad \xi_1 - \eta_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{D}},$$

domaine que nous désignerons par d_0.

Sortons de d_0 par le côté

$$\xi_1 + \eta_1 = \tfrac{1}{2},$$

on a

$$\varepsilon_1 < 0, \qquad |\varepsilon_1| > \tfrac{1}{2}.$$

La substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 + x_2, x_2, x_3, x_4),$$

qui remplace ε_1 par $\varepsilon_1 + 1$, réduit la forme et donne

$$f_1 = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 + x_2) x_4,$$

avec les conditions de réduction

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2} &< -(\xi_1 + \eta_1) + 1 &&< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) &&< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< \xi_1 \eta_1 &&< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2} &&< \tfrac{1}{2},\\
-\tfrac{1}{2} &< -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}} &&< \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

qui nous montrent que la forme est réduite dans le rectangle formé par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \tfrac{1}{2},\ 1, \qquad \xi_1 - \eta_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{D}},$$

domaine d_1.

Sortons de d_1 par le côté $\xi_1 + \eta_1 = 1$; nous avons, dans le voisinage de côté

$$\varepsilon_5 < 0, \qquad |\varepsilon_5| > \tfrac{1}{2},$$

la substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, x_2 + x_4, x_3, x_4),$$

remplace ε_5 par $\varepsilon_5 + 1$, mais aussi ε_3 par $\varepsilon_3 + \varepsilon_1$.

Si cette quantité est, en valeur absolue, inférieure à $\frac{1}{2}$, la substitution considérée réduit la forme.

Or on a

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_1 = \xi_1\eta_1 - (\xi_1 + \eta_1) + 1;$$

il n'est pas difficile de voir qu'au voisinage du côté traversé elle est positive et inférieure à $\frac{1}{2}$.

Donc, on obtient la forme

$$f_{1'} = (x_2 + x_4)^2 - Dx_3^2 - (x_1 + x_2 + x_4)x_4 = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 - x_2)x_4.$$

Arrêtons-nous et revenons au domaine primitif d_0.

Sortons de d_0 par le côté

$$\xi_1 + \eta_1 = -\tfrac{1}{2};$$

on a

$$\varepsilon_1 > 0, \qquad |\varepsilon_1| > \tfrac{1}{2},$$

la substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_2, x_2, x_3, x_4),$$

qui remplace ε_1 par $\varepsilon_1 - 1$, réduit la forme qui devient

$$f_{1'} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 - x_2)x_4,$$

qui est réduite dans le rectangle $d_{1'}$,

$$\xi_1 + \eta_1 = -\tfrac{1}{2},\ -1, \qquad \xi_1 - \eta_1 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}.$$

Or, cette forme $f_{1'}$ coïncide avec $f_{1'}$; donc, il est inutile de pousser plus avant la réduction dans la bande du plan, limitée par les droites

$$\xi_1 - \eta_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{D}}.$$

Si nous partons de d_0 dans le sens des ξ_1 positifs, nous rencontrons successivement les formes $f_0, f_1, f_{1'}, f_0, f_1, f_{1'}, \ldots$, et dans le sens des ξ_1

négatifs f_0, $f_{1'}$, f_1, f_0, $f_{1'}$, f_1, ...; de sorte que, si nous considérons le domaine formé par la réunion des domaines $d_{1'}$, d_0, d_1, nous voyons que ce domaine se reproduit à l'infini et nous donne une division régulière de la bande du plan considérée.

Revenons maintenant au domaine d_0 et réduisons la forme initiale en faisant varier le point (ξ_1, η_1) dans la bande du plan limitée par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Nous donnons la Table du calcul; ce que nous venons de dire nous permet d'abréger les explications

$$(\alpha) \qquad f_0 = x_2^2 - D x_3^2 - x_1 x_4.$$

Côté de sortie..... $\xi_1 - \eta_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{D}}$, $\quad \varepsilon_2 > 0$, $\quad |\varepsilon_2| > \tfrac{1}{2}$.

Substitution..... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_2 = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - x_3) x_4.$$

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 1,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1 \eta_1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine d_2..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}$, $\quad \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}$.

Si l'on sort de d_0 symétriquement par rapport à l'origine, on trouve

$$f_{2'} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 + x_3) x_4.$$

(β) Côté de sortie de d_2.... $\xi_1 - \eta_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{D}}$, $\quad \varepsilon_2 > 0$, $\quad |\varepsilon_2| > \tfrac{1}{2}$.

Substitution..... $(x_1, x_2, x_3\ x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2'} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - 2x_3) x_4.$$

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 2,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1 \eta_1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine $d_{2'}$..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}$, $\quad \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}$.

Si l'on sort de d_2, symétriquement, on trouve

$$f_{2^{2'}} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 x_3) x_4.$$

(γ) Côté de sortie de d_{2^2}.... $\xi_1 - \eta_1 = \frac{5}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon| > \frac{1}{2}$.

Substitution..... $(x_1, x_2, x_3, x_4; x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2^3} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - 3x_3) x_4,$$

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 3,$$

$$\varepsilon_3 = \xi_1 \eta_1,$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$

$$\varepsilon_6 = \frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine d_{2^3}.... $\xi_1 + \eta_1 = \pm \frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{5}{2\sqrt{D}}$,

et, comme quatrième côté, la droite

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{7}{2\sqrt{D}},$$

ou l'hyperbole équilatère

$$\xi_1 \eta_1 + \frac{1}{2} = 0,$$

suivant la valeur de D. Si c'est la droite

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{5}{2\sqrt{D}},$$

on continuera à réduire de la même manière jusqu'à ce qu'on rencontre cette hyperbole équilatère, ce qui arrivera d'autant plus tard que D sera plus grand. Si nous supposons $D = 5$, cette circonstance se présente maintenant. Plaçons-nous dans ce cas pour fixer les idées; le domaine d_{2^3} est donc limité par

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \frac{1}{2}, \quad \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{5}{2\sqrt{D}}, \quad \xi_1 \eta_1 = -\frac{1}{2}.$$

(δ) Côté de sortie de d_{2^3}. $\xi_1 - \eta_1 + \frac{1}{2} = 0$, $\varepsilon_3 < 0$, $|\varepsilon_3| > \frac{1}{2}$.

Substitution..... $(x_1, x_2, x_3, x_4; x_1 + x_4, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2^4} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - 3x_3 + x_4) x_4.$$

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 3,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1\eta_1 + 1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine d_{2^4}..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\xi_1\eta_1 + \frac{1}{2} = 0$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{7}{2}$.

On aurait de même, symétriquement,

$$f_{2^{4'}} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 + 3x_3 + x_4)x_4.$$

(ε) Côté de sortie de d_{2^4}. $\xi_1 - \eta_1 = \frac{7}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_2| > \frac{1}{2}$.

Substitution..... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2^5} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 - 4x_3 + x_4)x_4.$$
$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 4,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1\eta_1 + 1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine d_{2^5}..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$.

On aurait, symétriquement,

$$f_{2^{5'}} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 + 4x_3 + x_4)x_4.$$

(ζ) Côté de sortie de d_{2^5}.... $\xi_1 - \eta_1 = \frac{9}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_2| > \frac{1}{2}$,

Substitution..... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$,

$$f_{2^6} = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 - 5x_3 + x_4)x_4,$$
$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 5,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1\eta_1 + 1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine d_{2^6}..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{9}{2}$,

et la droite

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \tfrac{11}{2},$$

ou la droite

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{2D}{2};$$

si l'on se place toujours dans le cas de $D = 5$, cette circonstance se présente ici, car $2D = 10$.

(η) Côté de sortie de d_{2^6}. $(\xi_1 - \eta_1) = \dfrac{2D}{2\sqrt{D}}\left(\dfrac{10}{2\sqrt{D}}\right)$, $\varepsilon_6 < 0$, $|\varepsilon_6| > \frac{1}{2}$.

La substitution $(x_3 ; x_3 + x_4)$ remplace ε_6 par $\varepsilon_6 + 1$, ce qui réduit ε_6, mais aussi ε_3 par $\varepsilon_3 + \varepsilon_2$.

Or, au voisinage du côté de sortie, $\varepsilon_3 + \varepsilon_2$ est > 0 et de valeur plus grande que $\frac{1}{2}$. Il faut donc, en outre, poser $(x_4 ; x_4 - x_4)$ pour achever de réduire la forme. La substitution réductrice est donc en définitive

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_4,\ x_2,\ x_3 + x_4,\ x_4),$$

$$f_{2^7} = x_2^2 - D(x_3 + x_4)^2 - (x_1 - 5x_3 - 5x_4 - x_4 + x_4)x_4 = x_2^2 - Dx_3^2 - x_1 x_4 = f_0.$$

Il sera donc inutile d'aller plus loin et l'on voit que dans la bande limitée par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2},$$

si l'on s'avance dans le sens des ξ_1 positifs, on rencontre successivement les formes

$$f_0,\ f_2,\ f_{2^2},\ f_{2^3},\ f_{2^4},\ f_{2^5},\ f_{2^6},\ f_0,\ f_2,\ f_{2^2},\ \ldots,$$

et, dans le sens des ξ_1 négatifs,

$$\ldots,\ f_0,\ f_{2^{-6}},\ f_{2^{-5}},\ f_{2^{-4}},\ f_{2^{-3}},\ f_{2^{-2}},\ f_{2^{-1}},\ f_0.$$

Ce qui se passe pour $D = 5$ est général et l'on a un nombre de formes distinctes d'autant plus grand que D est lui-même plus grand.

Si donc on réunit ensemble les domaines

$$d_{2^{-6}},\ d_{2^{-5}},\ d_{2^{-4}},\ d_{2^{-3}},\ d_{2^{-2}},\ d_{2^{-1}},\ d_0,\ d_2,\ d_{2^2},\ d_{2^3},\ d_{2^4},\ d_{2^5},\ d_{2^6},$$

on obtient un domaine qui se reproduit à l'infini et donne une division régulière de la portion de plan limitée par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

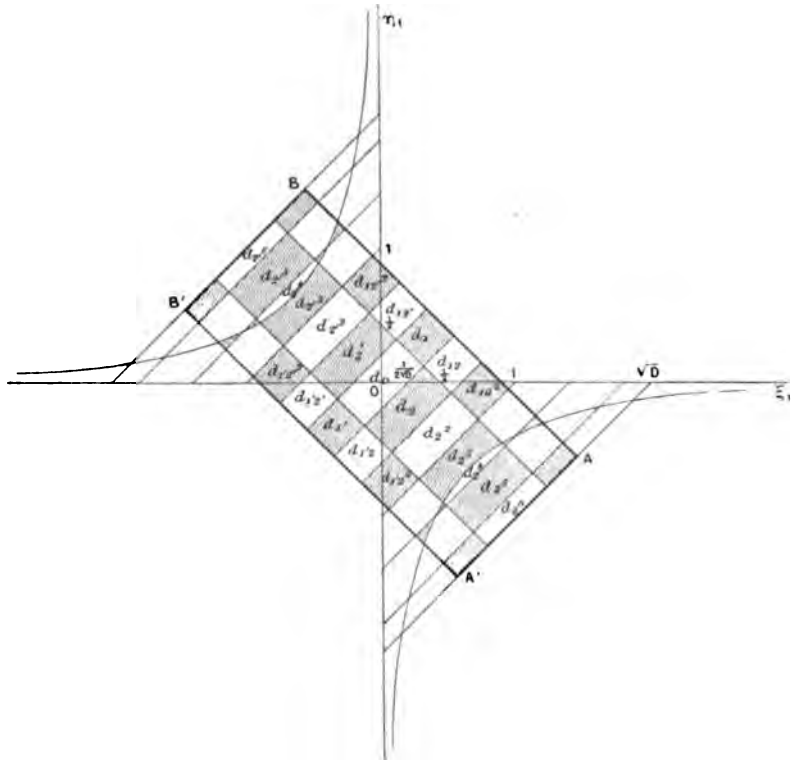
En tenant compte de ce que nous avons déjà trouvé, nous en concluons l'existence, dans le plan des ξ_1, η_1, d'un domaine fondamental qui est le rectangle ayant pour côtés

$$\xi_1 - \eta_1 = \pm 1, \qquad \xi_1 - \eta_1 = \pm\sqrt{D}.$$

La *fig.* 1, qui correspond au cas de $D = 5$, montre clairement tout ce que nous venons de dire.

Nous obtiendrons des substitutions semblables de la forme f_0, en prenant

Fig. 1.



les substitutions qui nous permettent de passer du domaine d_0 à tout domaine correspondant à la même réduite f_0.

On retrouve ainsi les substitutions qui correspondent aux substitutions hyperabéliennes

$$(\xi_1, \eta_1;\ \xi_1 + 1,\quad \eta_1 - 1),$$
$$(\xi_1, \eta_1;\ \xi_1 - \sqrt{D},\ \eta_1 - \sqrt{D});$$

elles laissent d'ailleurs invariable le point à l'infini des domaines D, situé sur la limite du domaine S.

34. Revenons maintenant aux conditions de réduction et considérons-les dans toute leur généralité sans supposer $\zeta^2 = 1$. Les quantités ε_4 et ε_5 ont seules changé dans ce nouveau cas; on a

$$\varepsilon_4 = \sqrt{D}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$$

et

$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \zeta^2\eta_1}{1+\zeta^2}.$$

Si l'on écrit les conditions

$$-\tfrac{1}{2} < -\frac{\xi_1 + \zeta^2\eta_1}{1+\zeta^2} < \tfrac{1}{2},$$

les droites limites obtenues en prenant le signe d'égalité ne sont plus parallèles à $\xi_1 + \eta_1 = 0$, comme dans le cas précédent, mais ont un coefficient angulaire égal à $-\zeta^2$.

Nous allons construire ces droites limites pour les valeurs limites de ζ^2, c'est-à-dire pour les quatre valeurs

$$4D - 1 - 2\sqrt{2D(2D-1)},\quad \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},\quad \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},\quad 4D - 1 + 2\sqrt{2D(2D-1)}.$$

Les droites

$$2\left(\xi_1 + \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}\eta_1\right) = \quad 1 + \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},$$

$$2\left(\xi_1 + \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}\eta_1\right) = -1 - \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},$$

passent respectivement par les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, et par les points d'intersection des droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad \xi_1 + \eta_1 = -\tfrac{1}{2},$$
$$\xi_1 - \eta_1 = -\sqrt{D}, \qquad \xi_1 - \eta_1 = +\sqrt{D};$$

de même, les droites

$$2\left(\xi_1 + \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}\eta_1\right) = \quad 1 + \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

$$2\left(\xi_1 + \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}\eta_1\right) = -1 - \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

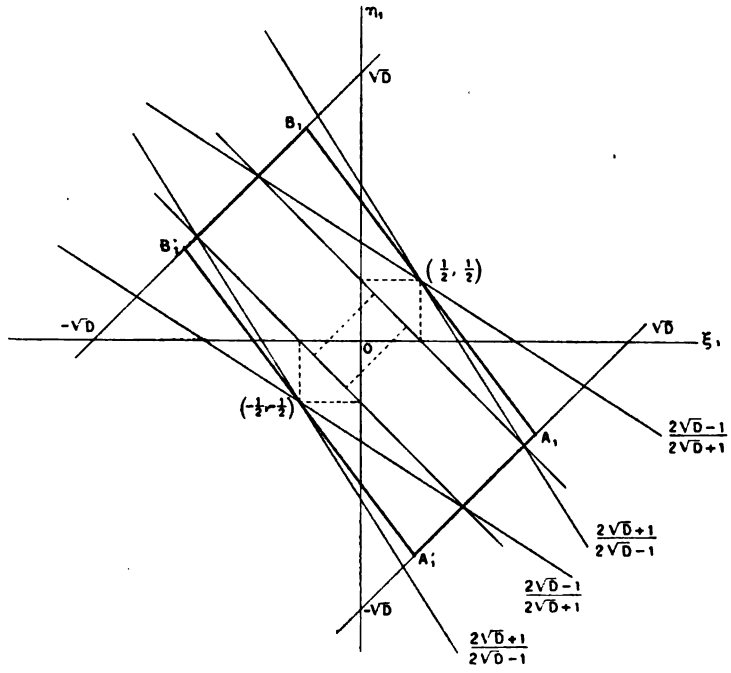
passent par les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, et par les points d'intersection des

droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad \xi_1 + \eta_1 = -\tfrac{1}{2},$$
$$\xi_1 - \eta_1 = +\sqrt{D}, \qquad \xi_1 - \eta_1 = -\sqrt{D}.$$

Les quatre autres droites limites correspondant aux racines de l'équation en X du n° 31, passent également par les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, et comprennent dans leur angle les droites que nous venons de construire; par

Fig. 2.



suite, deux d'entre elles, parallèles, coupent le domaine fondamental, les deux autres ne le traversent pas.

Nous voyons donc que, si ζ^2 est compris entre les nombres

$$\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}, \quad \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

ε_4 est positif ou négatif, suivant que ζ^2 est plus petit ou plus grand que 1, et il n'y a de changé que la forme du domaine fondamental qui est un parallélogramme $A_1 A'_1 B_1 B'_1$ ayant pour côtés

$$\xi_1 - \eta_1 = \pm\sqrt{D}, \qquad \xi_1 + \zeta^2 \eta_1 = \pm(1 + \zeta^2).$$

Nous pouvons résumer les résultats obtenus jusqu'ici et leur donner une forme géométrique en considérant ζ^2 comme une troisième coordonnée dans un système de coordonnées rectangulaires (ξ_1, η_1, ζ^2).

ζ^2 variant de $\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}$ à $\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}$, nous avons une division régulière de la portion d'espace limitée par les deux plans

$$\zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}, \qquad \zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

qui résulte de la répétition d'un même domaine fondamental formé par la portion d'espace comprise entre les deux plans $\xi_1 - \eta_1 \pm \sqrt{D}$ et les deux hélicoïdes gauches $\xi_1 + \zeta^2\eta_1 = \pm(1+\zeta^2)$.

35. Si ζ^2 est en dehors de l'intervalle $\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}, \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}$, une étude complémentaire s'impose.

Dans ce cas, en effet, on a

$$\varepsilon_4 \lessgtr 0, \qquad |\varepsilon_4| > \tfrac{1}{2},$$

et la forme f_0 ne peut être réduite pour aucune valeur de (ξ_1, η_1). C'est dire que le domaine d_0 de réduction de f_0 ne s'étend ni au-dessus, ni au-dessous des deux plans précédents.

Considérons les plans

$$\zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}-p}{2\sqrt{D}+p}, \qquad \zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}+p}{2\sqrt{D}-p},$$

p étant un nombre entier positif impair. Les premiers coupent l'axe des ζ^2 entre l'origine et le point $\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}$, si $p \leqq 2\sqrt{D}$, les seconds entre le point $\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}$ et l'∞. Ne considérons de ces plans que ceux compris entre les racines de l'équation en X, de manière à avoir toujours pour les valeurs correspondantes de ζ^2

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Cela étant, si ζ^2 est compris entre

$$\frac{2\sqrt{D}-(p+2)}{2\sqrt{D}+(p+2)} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{D}-p}{2\sqrt{D}+p},$$

la substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, x_2 - px_3, x_3, x_4)$$

réduira la forme, à condition qu'il y ait des valeurs de (ξ_1, η_1) satisfaisant aux conditions

$$|\varepsilon_2 - p\varepsilon_1| = |\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1)| < \tfrac{1}{2},$$

et, si ζ^2 est compris entre

$$\frac{2\sqrt{D} + p}{2\sqrt{D} - p} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{D} + (p+2)}{2\sqrt{D} - (p+2)},$$

il faudra prendre, pour réduire la forme, la substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, x_2 + px_3, x_3, x_4),$$

pourvu qu'il existe des valeurs de (ξ_1, η_1) satisfaisant aux inégalités

$$|\varepsilon_2 + p\varepsilon_1| = |\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - p(\xi_1 + \eta_1)| < \tfrac{1}{2},$$

car, par exemple, la première substitution remplace

$$\varepsilon_4 \quad \text{par} \quad \varepsilon_4 - p \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 \quad \text{par} \quad \varepsilon_2 - p\varepsilon_1.$$

Or, $\varepsilon_4 = \sqrt{D}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$ est plus petit que $\frac{p+1}{2}$ et plus grand que p. Pour s'assurer si la condition auxiliaire peut être satisfaite, construisons dans le premier cas les droites

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1) - \tfrac{1}{2} = 0,$$
$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1) + \tfrac{1}{2} = 0;$$

ces droites sont parallèles et passent respectivement par les points

$$\left(\frac{1}{4p}, \frac{1}{4p}\right), \left(\frac{1}{4\sqrt{D}}, -\frac{1}{4\sqrt{D}}\right),$$
$$\left(-\frac{1}{4p}, -\frac{1}{4p}\right), \left(-\frac{1}{4\sqrt{D}}, \frac{1}{4\sqrt{D}}\right),$$

et les points de la portion de plan comprise entre ces droites satisfont à la condition exigée pour la réduction.

Il en est de même dans le second cas.

36. Appliquons ces substitutions à la forme f_0; nous trouvons

$$(x_2 - px_3)^2 - Dx_3^2 - x_1x_4, \qquad \text{si} \quad \varepsilon_4 > 0,$$
$$(x_2 + px_3)^2 - Dx_3^2 - x_1x_4, \qquad \text{si} \quad \varepsilon_4 < 0.$$

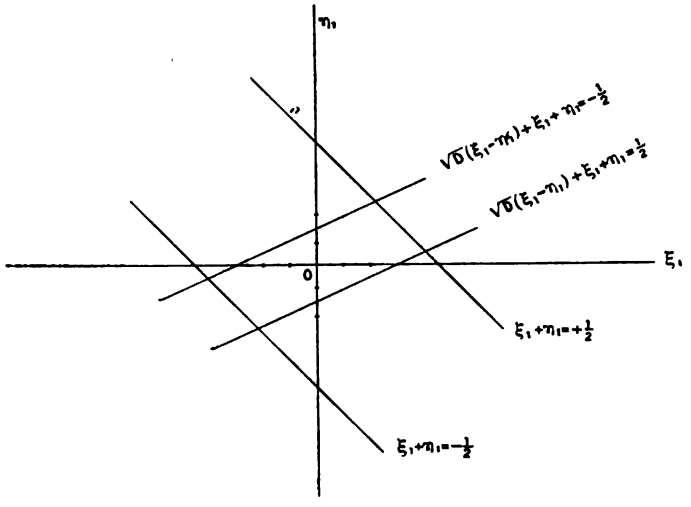
Si, en outre, nous supposons fixe la valeur de ζ^2, nous voyons que ces formes seront réduites dans les parallélogrammes limités par les droites

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1) \pm \tfrac{1}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

La réduction continuelle de chacune des deux formes dans les plans correspondant aux valeurs de ζ^2 se fera sans plus de peine que dans l'exemple traité plus haut, et l'on rencontrera encore ici les deux mêmes substitutions semblables.

La *fig.* 3 ci-dessous montre le parallélogramme dans lequel est réduite

Fig. 3.



la forme de départ et correspond au cas où ζ^2 est compris entre

$$\frac{2\sqrt{D}-3}{2\sqrt{D}+3} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1} \qquad \text{et} \qquad D = 5.$$

Dans ce qui précède, nous avons retrouvé deux de nos substitutions fondamentales; ce sont celles qui correspondent aux substitutions semblables,

$$(\xi, \eta;\ \xi + 1, \eta - 1), \qquad (\xi, \eta;\ \xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}).$$

Elles laissent d'ailleurs invariable le point de la limite du domaine S commun à tous les domaines de réduction.

Abandonnons maintenant l'hypothèse faite jusqu'à présent

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \frac{1}{2},$$

et faisons varier le plan $\zeta^2 = \text{const.}$ en dehors des limites qui lui étaient imposées par les racines de l'équation en X. Il est clair que pour réduire de nouveau la forme, on pourra employer une substitution de la forme

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, \alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3, x_4)$$

avec

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 1,$$

à condition de supposer (ξ_1, η_1) choisis de manière à satisfaire aux inégalités

$$-\tfrac{1}{2} < \alpha\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2 < \tfrac{1}{2},$$
$$-\tfrac{1}{2} < \beta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 < \tfrac{1}{2},$$

ce qui est toujours possible, car il suffit de supposer (ξ_1, η_1) à l'intérieur du parallélogramme ayant pour côtés

$$\alpha\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2 = \pm\tfrac{1}{2}, \qquad \beta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 = \pm\tfrac{1}{2}.$$

Il suffira même que la substitution choisie réduise la forme binaire

$$\mu_2(x_2 + \varepsilon_4 x_3)^2 + \mu_3 x_3^2,$$

les conditions relatives à (ξ_1, η_1) étant conservées.

Or, le calcul de la réduction de cette forme binaire définie est forcément limité, comme on sait. On finira par retomber sur des réduites obtenues et l'on déduira par conséquent, de ce calcul, des substitutions semblables pour la forme donnée. Elles ne contiendront que x_2 et x_3; donc elles seront aussi des substitutions semblables de $x_2^2 - Dx_3^2$, c'est-à-dire seront telles que l'on ait

$$\alpha^2 - D\gamma^2 = 1.$$

Ce seront donc les substitutions qui correspondent aux puissances de la substitution

$$[\xi, \eta;\ (a - c\sqrt{D})\xi, (a + c\sqrt{D})\eta],$$

a et c étant des solutions de l'équation de Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

Cette substitution laisse aussi invariable le point de la limite du domaine S commun aux domaines de réduction.

En résumé, ce calcul de réduction continuelle nous a fait retrouver les trois substitutions désignées par α, β, δ au début de cette seconde Partie, et nous montre que ces substitutions laissent invariable un point de la limite du domaine S.

Sur une classe de sous-groupes.

37. On connaît l'importance spéciale, dans la théorie des fonctions modulaires, des sous-groupes à congruences, c'est-à-dire des sous-groupes dont les substitutions

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

satisfont aux congruences

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv \delta \equiv \pm 1 \\ \gamma \equiv \beta \equiv \quad 0 \end{array}\right\} \pmod{n}.$$

M. Klein les a pris comme base d'une classification, dans laquelle il a divisé les fonctions modulaires en degrés (Stufen) suivant la valeur de l'entier n. Il existe, dans le groupe découvert par M. Picard, des sous-groupes tout à fait analogues.

Si nous prenons, par exemple, les substitutions du type A

$$\xi_1 = \frac{(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi + (b_1 + b_3\sqrt{D})}, \qquad \eta_1 = \frac{(a_0 + a_2\sqrt{D})\eta + (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(b_0 + b_2\sqrt{D})\eta + (b_1 - b_3\sqrt{D})},$$

et, si l'on désigne par n un nombre entier, les substitutions satisfaisant aux congruences

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 - a_2\sqrt{D} \equiv \pm 1, & a_1 + a_3\sqrt{D} \equiv 0 \\ b_0 - b_2\sqrt{D} \equiv 0, & b_1 + b_3\sqrt{D} \equiv \pm 1 \\ a_0 + a_2\sqrt{D} \equiv \pm 1, & a_1 - a_3\sqrt{D} \equiv 0 \\ b_0 + b_2\sqrt{D} \equiv 0, & b_1 - b_3\sqrt{D} \equiv \pm 1 \end{array}\right\} \pmod{n}$$

forment un groupe qui, ainsi qu'il est aisé de le voir, est un sous-groupe d'indice fini du groupe que nous étudions.

TROISIÈME PARTIE.

FONCTIONS DU GROUPE.

Fonctions ϑ et modules.

38. Nous allons nous occuper, dans ce Chapitre, des fonctions que laissent invariables les substitutions du groupe que nous considérons ou d'un de ses sous-groupes.

Avant d'aborder cette question, nous allons considérer un cas particulier important.

On sait quel grand intérêt offre, dans le cas du groupe modulaire, l'étude des fonctions ϑ, dans lesquelles on suppose l'argument nul et où l'on considère comme variable le rapport $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ des périodes. M. Hermite a rencontré ainsi le premier exemple de fonctions modulaires.

Nous allons considérer de même ici les fonctions ϑ à deux arguments, et nous donnerons à ces arguments les valeurs o.

39. On sait qu'il y a seize fonctions ϑ à deux arguments; six d'entre elles sont des fonctions impaires; les dix autres sont des fonctions paires. Si donc on y suppose les arguments nuls, les six fonctions impaires seront identiquement nulles et nous aurons seulement à considérer dix fonctions ϑ.

En prenant comme notations celles de MM. Weierstrass et Weber, nos fonctions auront la forme

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(0, 0)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} e^{\pi i\left[\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)^2\tau_{11}+2\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)\tau_{12}+\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)^2\tau_{22}\right]+\pi i\left[\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)h_1+\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)h_2\right]},$$

τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} désignent les modules de périodicité.

$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ se nomme la *caractéristique;* les nombres g et h sont égaux à

o ou 1 ; de plus, la fonction étant paire, on a

$$g_1 h_1 + g_2 h_2 \equiv 0 \pmod 2.$$

De plus, nous conviendrons de représenter les dix fonctions ϑ paires par l'une ou l'autre des notations

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \vartheta_5, \qquad \vartheta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \vartheta_{14},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \vartheta_{01}, \qquad \vartheta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \vartheta_{12},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \vartheta_4, \qquad \vartheta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \vartheta_{03},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \vartheta_{23}, \qquad \vartheta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \vartheta_{34},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \vartheta_0, \qquad \vartheta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \vartheta_2.$$

Nous rappellerons que les éléments du Tableau suivant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta_4^2}{\vartheta_5^2} & \dfrac{\vartheta_0^2}{\vartheta_5^2} & -\dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta_5^2} \\ -\dfrac{\vartheta_{14}^2}{\vartheta_5^2} & \dfrac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} & \dfrac{\vartheta_{12}^2}{\vartheta_5^2} \\ \dfrac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_5^2} & -\dfrac{\vartheta_{03}^2}{\vartheta_5^2} & \dfrac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta_5^2} \end{vmatrix}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale.

40. Nous avons posé, d'après M. Picard,

$$\tau_{11} = -\frac{2\sqrt{D}}{\xi+\eta}, \qquad \tau_{12} = \sqrt{D}\,\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}, \qquad \tau_{22} = \frac{2\sqrt{D}\,\xi\eta}{\xi+\eta}.$$

Si l'on fait cette substitution dans les fonctions ϑ, elles deviennent des fonctions des deux variables indépendantes ξ et η et du nombre entier D (¹).

Pour voir ce que deviennent ces fonctions quand on effectue sur les variables ξ, η les substitutions du groupe, il est nécessaire de chercher les

(¹) On voit qu'une particularité des fonctions que nous étudions est de dépendre de *deux* variables et d'*un* nombre entier, tandis que, dans le cas des fonctions modulaires, on ne rencontre que la variable $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$.

substitutions sur τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} qui correspondent aux substitutions fondamentales de notre groupe.

Nous trouvons sans difficulté :

$$\text{A la substitution } \alpha \text{ correspond} \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \tau_{11} \\ \tau_{12} & \tau_{12}-\tau_{11}, \\ \tau_{22} & \tau_{11}-2\tau_{12}+\tau_{22}, \end{array}\right.$$

$$\text{A la substitution } \beta \text{ correspond} \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \dfrac{\tau_{11}}{1+\tau_{11}}, \\ \tau_{12} & \dfrac{\tau_{12}}{1+\tau_{11}}, \\ \tau_{22} & \dfrac{-D\tau_{11}+\tau_{22}-2D}{1+\tau_{11}}, \end{array}\right.$$

$$\text{A la substitution } \gamma \text{ correspond} \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \tau_{22}, \\ \tau_{12} & -\tau_{12}, \\ \tau_{22} & \tau_{11}, \end{array}\right.$$

$$\text{A la substitution } \delta \text{ correspond} \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \dfrac{-\tau_{11}}{c\tau_{12}-a}, \\ \tau_{12} & \dfrac{Dc-a\tau_{12}}{c\tau_{12}-a}, \\ \tau_{22} & \dfrac{-\tau_{22}}{c\tau_{12}-a}, \end{array}\right.$$

$$\text{A la substitution } \varepsilon \text{ correspond} \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \tau_{11}, \\ \tau_{12} & -\tau_{12}, \\ \tau_{22} & \tau_{22}. \end{array}\right.$$

Cela étant il faut appliquer, à chacune des dix fonctions ϑ, ces cinq transformations linéaires sur les τ.

Rappelons, à cet effet, la formule de la transformation linéaire des fonctions ϑ à arguments nuls

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})$$
$$= C\, e^{\frac{i\pi}{2}[(g_1h_1+g_2h_2)-(g'_1h'_1+g'_2h'_2)]-\frac{i\pi}{4}\omega'}\, \vartheta\begin{bmatrix} g'_1 & g'_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{bmatrix}(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

dans laquelle on a posé

$$\begin{aligned}\omega' = {} & g_1^2(a_0d_0+b_0c_0)+g_2^2(a_1d_1+b_1c_1)+h_2^2(a_2d_2+b_2c_2)+h_1^2(a_3d_3+b_3c_3) \\ & +2g_1g_2(c_0b_1+d_0a_1)+2g_1h_2(c_0b_2+d_0a_2)+2g_1h_1(c_0b_3+d_0a_3) \\ & +2g_2h_2(c_1b_2+d_1a_2)+2g_2h_1(c_1b_3+d_1a_3)+2h_1h_2(c_2b_3+d_2a_3) \\ & +2g_1(c_0b+d_0a)+2g_2(c_1b+d_1a)+2h_2(c_2b+d_2a)+2h_1(c_3b+d_3a),\end{aligned}$$

$$a = a_0 a_3 + a_1 a_2, \qquad b = b_0 b_3 + b_1 b_2,$$

$$\begin{aligned}
g'_1 &= g_1 a_0 + g_2 a_1 + h_2 a_2 + h_1 a_3 + a_0 a_3 + a_1 a_2,\\
g'_2 &= g_1 b_0 + g_2 b_1 + h_2 b_2 + h_1 b_3 + b_0 b_3 + b_1 b_2,\\
h'_2 &= g_1 c_0 + g_2 c_1 + h_2 c_2 + h_1 c_3 + c_0 c_3 + c_1 c_2,\\
h'_1 &= g_1 d_0 + g_2 d_1 + h_2 d_2 + h_1 d_3 + d_0 d_3 + d_1 d_2,
\end{aligned}$$

la transformation étant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \quad (^1),$$

τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22} étant des fonctions de τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} et enfin c désignant une constante qui ne dépend que des coefficients de la transformation et qui est la même pour les dix fonctions ϑ.

Remarquons aussi, avant d'appliquer cette formule, que deux transformations dont les éléments sont égaux et de signes contraires donnent le même résultat dans la formule de transformation.

41. Appliquons maintenant ces résultats généraux à nos cinq transformations.

Transformation α.

L'une des deux transformations linéaires à quatre variables correspondant à α est

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad \omega' = 0,$$

$$\begin{aligned}
g'_1 &= g_1 - g_2,\\
g'_2 &= g_2, \qquad\qquad g'_1 h'_1 + g'_2 h'_2 = g_1 h_1 + g_2 h_2,\\
h'_2 &= h_1 + h_2,\\
h'_1 &= h_1;
\end{aligned}$$

(1) *Voir* le Livre de M. Krause *Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques du premier ordre.*

la formule de transformation devient

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(\tau') = \varepsilon_1 \vartheta \begin{bmatrix} g'_1 & g'_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{bmatrix}(\tau);$$

appliquée aux dix fonctions ϑ, elle donne, en désignant par ϑ'_α la fonction ϑ_α relative aux modules transformés τ',

$$\begin{array}{ll} \vartheta'_5 = \varepsilon_1 \vartheta_5, & \vartheta'_{14} = \varepsilon_1 \vartheta_{03}, \\ \vartheta'_{01} = \varepsilon_1 \vartheta_{01}, & \vartheta'_{12} = \varepsilon_1 \vartheta_0, \\ \vartheta'_4 = \varepsilon_1 \vartheta_{23}, & \vartheta'_{03} = \varepsilon_1 \vartheta_{14}, \\ \vartheta'_{23} = \varepsilon_1 \vartheta_4, & \vartheta'_{34} = \varepsilon_1 \vartheta_{34}, \\ \vartheta'_0 = \varepsilon_1 \vartheta_{12}, & \vartheta'_2 = \varepsilon_1 \vartheta_2. \end{array}$$

En outre, si l'on développe l'identité

$$\vartheta'_5 = \varepsilon_1 \vartheta_5,$$

on voit que la transformation sur les τ équivaut à la substitution suivante sur les indices de la série

$$(m_1, m_2; m_1 - m_2, m_2);$$

donc, elle ne fait que changer l'ordre des termes de la série, ce qui n'a aucun effet sur sa valeur, la série étant absolument convergente. On a donc

$$\varepsilon_1 = +1,$$

et l'on peut écrire le Tableau ci-dessus sous la forme

$$\begin{array}{ll} \vartheta'_5 = \vartheta_5, & \vartheta'_{23} = \vartheta_4, \\ \vartheta'_{01} = \vartheta_{01}, & \vartheta'_0 = \vartheta_{12}, \\ \vartheta'_{34} = \vartheta_{34}, & \vartheta'_{12} = \vartheta_0, \\ \vartheta'_2 = \vartheta_2, & \vartheta'_{14} = \vartheta_{03}, \\ \vartheta'_4 = \vartheta_{23}, & \vartheta'_{03} = \vartheta_{14}. \end{array}$$

Transformation β.

L'une des transformations linéaires correspondantes est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -D & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad \omega' = -\mathrm{D}g_2^2 + h_1^2 + 2h_1,$$
$$g'_1 = g_1 + h_1 + 1,$$
$$g'_2 = g_2,$$
$$h'_2 = -\mathrm{D}g_2 + h_2 - \mathrm{D},$$
$$h'_1 = h_1.$$

On n'obtient pas les mêmes résultats en appliquant la formule de transformation, suivant que D est impair ou pair. On doit donc distinguer deux cas. On a, dans le cas où D est impair,

$$\begin{aligned}
\vartheta'_5 &= \varepsilon_2\vartheta_2, & \vartheta'_0 &= e^{\frac{i\pi}{4}}\varepsilon_2\vartheta_{12},\\
\vartheta'_2 &= \varepsilon_2\vartheta_5, & \vartheta'_4 &= -e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}}\varepsilon_2\vartheta_{23},\\
\vartheta'_{01} &= \varepsilon_2\vartheta_{34}, & \vartheta'_{23} &= -e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}}\varepsilon_2\vartheta_4,\\
\vartheta'_{34} &= -\varepsilon_2\vartheta_{01}, & \vartheta'_{14} &= -e^{\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}+1)}\varepsilon_2\vartheta_{14},\\
\vartheta'_{12} &= e^{\frac{i\pi}{4}}\varepsilon_2\vartheta_0, & \vartheta'_{03} &= -e^{\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}+1)}\varepsilon_2\vartheta_{03},
\end{aligned}$$

et, dans le cas où D est pair,

$$\begin{aligned}
\vartheta'_5 &= \varepsilon_2\vartheta_{01}, & \vartheta'_{14} &= -e^{\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}-1)}\varepsilon_2\vartheta_{14},\\
\vartheta'_{01} &= \varepsilon_2\vartheta_5, & \vartheta'_{03} &= -e^{-\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}-1)}\varepsilon_2\vartheta_{03},\\
\vartheta'_{34} &= \varepsilon_2\vartheta_2, & \vartheta'_{12} &= e^{\frac{i\pi}{4}}\varepsilon_2\vartheta_{12},\\
\vartheta'_2 &= \varepsilon_2\vartheta_{34}, & \vartheta'_4 &= e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}}\varepsilon_2\vartheta_{23},\\
\vartheta'_0 &= e^{\frac{i\pi}{4}}\varepsilon_2\vartheta_0, & \vartheta'_{23} &= e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}}\varepsilon_2\vartheta_4.
\end{aligned}$$

Nous réservons, pour le moment, la détermination de la constante ε_2.

Transformation γ.

L'une des transformations linéaires est

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

d'où

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \omega' = 0,$$
$$g'_1 = -g_2,$$
$$g'_2 = g_1,$$
$$h'_2 = h_1,$$
$$h'_1 = -h_2.$$

On obtient le Tableau suivant, après avoir déterminé la constante $\varepsilon_3 = +1$, comme dans le premier cas,

$$\begin{array}{ll}
\vartheta'_5 = \vartheta_5, & \vartheta'_4 = \vartheta_{01}, \\
\vartheta'_{23} = \vartheta_{23}, & \vartheta'_{12} = \vartheta_{34}, \\
\vartheta'_0 = \vartheta_0, & \vartheta'_{34} = \vartheta_{12}, \\
\vartheta'_{14} = \vartheta_{14}, & \vartheta'_{03} = \vartheta_2, \\
\vartheta'_{01} = \vartheta_4, & \vartheta'_2 = \vartheta_{03}.
\end{array}$$

Transformation δ.

L'une des deux transformations linéaires est

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2 \\ D\alpha_2 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & D\alpha_2 & 0 & \alpha_0 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha_0^2 - D\alpha_2^2 = 1, \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_0 \equiv 1 \\ \alpha_2 \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\text{mod } 2),$$

d'où

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \omega' = 2D\alpha_0\alpha_2 + 2\alpha_0\alpha_2 + 4D\alpha_2^2 \equiv 0 \quad (\text{mod } 8).$$

On obtient le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ll}
\vartheta'_5 = \varepsilon_4\vartheta_5, & \vartheta'_{14} = \varepsilon_4\vartheta_{14}, \\
\vartheta'_{01} = \varepsilon_4\vartheta_{01}, & \vartheta'_{12} = \varepsilon_4\vartheta_{12}, \\
\vartheta'_4 = \varepsilon_4\vartheta_4, & \vartheta'_{03} = \varepsilon_4\vartheta_{03}, \\
\vartheta'_{23} = \varepsilon_4\vartheta_{23}, & \vartheta'_{34} = \varepsilon_4\vartheta_{34}, \\
\vartheta'_0 = \varepsilon_4\vartheta_0, & \vartheta'_2 = \varepsilon_4\vartheta_2.
\end{array}$$

Si $D \equiv 0 \pmod 2$, il s'introduit en outre, dans le second membre, un facteur $e^{i\pi\frac{3\alpha_0\alpha_2}{2}}$ qui est égal à $+1$ si $\alpha_2 \equiv 0$, -1 si $\alpha_2 \not\equiv 0 \pmod 4$. Nous réservons également la détermination de la constante ε_4.

Transformation ε.

L'une des deux transformations est

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \omega' = 0,$$

$$g'_1 = +g_1,$$
$$g'_2 = -g_2,$$
$$h'_2 = -h_2,$$
$$h'_1 = +h_1.$$

Si l'on détermine la constante $\mathfrak{S}_5$ comme plus haut, on trouve $\mathfrak{S}_5 = +1$ et l'on trouve le Tableau

$$\begin{array}{ll} \vartheta'_5 = \vartheta_5, & \vartheta'_{14} = \vartheta_{14}, \\ \vartheta'_{01} = \vartheta_{01}, & \vartheta'_{12} = \vartheta_{12}, \\ \vartheta'_4 = \vartheta_4, & \vartheta'_{03} = \vartheta_{03}, \\ \vartheta'_{23} = \vartheta_{23}, & \vartheta'_{34} = \vartheta_{34}, \\ \vartheta'_0 = \vartheta_0, & \vartheta'_2 = \vartheta_2. \end{array}$$

42. Il resterait maintenant, pour compléter ce que nous venons de dire, à déterminer les constantes $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_1$. Remarquons toutefois que, les fonctions ϑ n'intervenant que par leurs rapports dans ce qui va suivre, les valeurs de ces constantes ne nous sont d'aucune utilité.

Pourtant, nous avons appliqué à cette détermination une méthode bien connue, donnée jadis par M. Hermite dans le *Journal de Liouville* (année 1858), pour les fonctions ϑ à un seul argument et étendue aux fonctions ϑ à p arguments par M. Weber [1].

Nous n'avons rien trouvé de particulièrement remarquable. On peut vérifier les résultats en cherchant, par une méthode donnée par M. Krause dans son Livre *Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques du*

[1] WEBER, *Journal de Crelle*, t. 74.

premier ordre, le carré de ces constantes. On trouve

$$\Theta_2^2 = \frac{1}{1+\tau'_{11}},$$

$$\Theta_4^2 = \frac{1}{D\alpha_2^2 + 2\alpha_0\alpha_2\tau'_{12} + \alpha_0^2} = \frac{1}{c\tau_{12} - a}.$$

Nous avons résumé dans deux Tableaux à double entrée l'effet produit sur les dix fonctions ϑ paires à arguments par les substitutions fondamentales du groupe. Le premier Tableau est relatif à $D \not\equiv 1 \pmod 2$, le second à $D \equiv 0 \pmod 2$. Dans ces Tableaux, l'entrée verticale est relative aux substitutions, l'entrée horizontale aux fonctions ϑ; nous n'y avons désigné les fonctions ϑ que par leurs indices.

43. Ces Tableaux nous montrent immédiatement que les fonctions ϑ se séparent en deux groupes, les fonctions de chaque groupe ne faisant que se permuter, à des constantes près, par les substitutions α, β, γ, δ.

Quand $D \equiv 1 \pmod 2$, ces groupements sont

$$(\vartheta_5, \vartheta_2, \vartheta_{03}, \vartheta_{14}) \quad \text{et} \quad (\vartheta_4, \vartheta_{01}, \vartheta_{23}, \vartheta_{12}, \vartheta_{34}, \vartheta_0).$$

Quand $D \equiv 0 \pmod 2$, ce sont

$$(\vartheta_5, \vartheta_{01}, \vartheta_4, \vartheta_{23}) \quad \text{et} \quad (\vartheta_0, \vartheta_{14}, \vartheta_{12}, \vartheta_{03}, \vartheta_{34}, \vartheta_2).$$

Les groupements

$$(\vartheta_5, \vartheta_2, \vartheta_{03}, \vartheta_{14}) \quad \text{et} \quad (\vartheta_5, \vartheta_{01}, \vartheta_4, \vartheta_{23})$$

sont des groupements connus dans la théorie des fonctions ϑ.

Il n'y a pas de relation linéaire entre les quatre fonctions ϑ d'un même groupe et le carré de toute fonction ϑ peut s'exprimer linéairement en fonction des carrés des quatre fonctions de chacun de ces groupements.

Les groupements de cette nature, qui sont au nombre de soixante dans la théorie générale, portent le nom de *quadruplets pairs*. Ce sont aussi les fonctions ϑ contenues dans de tels groupements qui donnent lieu à la célèbre relation biquadratique de Göpel.

$D \not\equiv 1 \pmod 2$.

SUBSTITUTION.	5.	01.	4.	23.	0.	14.	12.	03.	34.	2.	CONST.
α.....	5	01	23	4	12	03	0	14	34	2	1
β.....	2	34	$-e^{\frac{i\pi}{4}D}23$	$-e^{\frac{i\pi}{4}D}4$	$e^{\frac{i\pi}{4}}12$	$-e^{\frac{i\pi}{4}(D+1)}14$	$e^{\frac{i\pi}{4}}0$	$-e^{\frac{i\pi}{4}(D+1)}03$	01	5	Θ_2
γ.....	5	4	01	23	0	14	34	2	12	03	1
δ.....	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	Θ_4
ε.....	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	1

$D \equiv 0 \pmod 2$.

SUBSTITUTION.	5.	01.	4.	23.	0.	14.	12.	03.	34.	2.	CONST.
α.....	5	01	23	4	12	03	0	14	34	2	1
β.....	01	5	$e^{\frac{i\pi}{4}D}23$	$e^{\frac{i\pi}{4}D}4$	$e^{\frac{i\pi}{4}}0$	$-e^{-\frac{i\pi}{4}(D-1)}14$	$e^{\frac{i\pi}{4}}12$	$-e^{-\frac{i\pi}{4}(D-1)}03$	2	34	Θ_2
γ.....	5	4	01	23	0	14	34	2	12	03	1
δ.....	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	$\pm\Theta_4$
ε.....	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	1

44. Ces Tableaux nous permettent également de former autant de fonctions invariables par les substitutions du groupe que nous le désirons.

Remarquons d'abord que les exponentielles qui interviennent comme facteurs dans les fonctions ϑ sont toutes des racines huitièmes de l'unité.

Il en résulte que toute fonction symétrique des puissances huitièmes des fonctions ϑ contenues soit dans le premier groupement, soit dans le second, soit dans les deux groupements, se reproduit à une constante près, qui est le produit $\Theta_2^{8p}\Theta_4^{8q}$ élevé à la puissance marquée par le degré de la fonction symétrique.

En conséquence :

Si l'on prend deux pareilles fonctions symétriques, si on les élève à des puissances convenables et si l'on en prend le rapport, les constantes disparaîtront et l'on obtiendra une fonction qui sera invariable par toutes les substitutions du groupe.

Telles sont, par exemple, les fonctions

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{(\vartheta_5^8+\vartheta_2^8+\vartheta_{03}^8+\vartheta_{14}^8)^2}{\vartheta_5^8\vartheta_2^8+\vartheta_5^8\vartheta_{03}^8+\vartheta_5^8\vartheta_{14}^8+\vartheta_2^8\vartheta_{03}^8+\vartheta_2^8\vartheta_{14}^8+\vartheta_{03}^8\vartheta_{14}^8} \\[2ex]
\dfrac{(\vartheta_{01}^8+\vartheta_{34}^8+\vartheta_4^8+\vartheta_{12}^8+\vartheta_{23}^8+\vartheta_0^8)^6}{\vartheta_{01}^8\vartheta_{34}^8\vartheta_4^8\vartheta_{12}^8\vartheta_{13}^8\vartheta_0^8} \\[2ex]
\dfrac{\vartheta_5^8+\vartheta_2^8+\vartheta_{03}^8+\vartheta_{14}^8}{\vartheta_{01}^8+\vartheta_{34}^8+\vartheta_4^8+\vartheta_{12}^8+\vartheta_{23}^8+\vartheta_0^8}
\end{array}\right\}\quad D\equiv 1 \pmod 2.$$

Voici un cas où ce procédé se simplifie et l'on obtient une fonction remarquable du groupe.

Posons

$$\Phi=\vartheta_5\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_{14},$$
$$\Psi=\vartheta_4\vartheta_{01}\vartheta_{23}\vartheta_{12}\vartheta_{34}\vartheta_0.$$

La substitution	α.....	les reproduit
»	β.....	les multiplie respectivement par $\pm\Theta_2^4$, $\pm\Theta_2^6$
»	γ.....	les reproduit
»	δ.....	les multiplie respectivement par Θ_4^4, Θ_4^6
»	ε.....	les reproduit.

Donc, une substitution quelconque du groupe les multiplie respectivement par

$$\pm\Theta_2^{4p}\Theta_4^{4q},\qquad \pm\Theta_2^{6p}\Theta_4^{6q}.$$

Donc, la fonction

$$\frac{\Phi^6}{\Psi^4}$$

est une fonction du groupe.

45. Comme autres fonctions particulières, considérons les modules; d'abord un système de modules de Borchardt (¹).

Posons

$$\sqrt{x_1} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_5}, \qquad \sqrt{x_2} = \frac{\vartheta_{02}}{\vartheta_5}, \qquad \sqrt{x_3} = \frac{\vartheta_{14}}{\vartheta_5},$$

et supposons par exemple $D \equiv 1 \pmod 2$.

On voit, sans qu'il soit utile d'insister, en se reportant aux Tableaux donnés plus haut, que les cinq substitutions

$$\alpha, \quad \beta^2, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon$$

ne font que permuter ou changer le signe de ces trois modules. Donc, le sous-groupe ayant pour substitutions fondamentales

$$\alpha, \quad \beta^4, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon$$

laisse invariable le système considéré des modules de Borchardt.

46. Si nous recherchons quelles sont les substitutions de notre groupe qui laissent invariables les modules de Richelot, il suffit de considérer un seul système de tels modules, tous les autres modules s'exprimant rationnellement à l'aide des premiers. Prenons, par exemple, les modules $\varkappa$, λ, μ définis par les formules

$$\varkappa = \frac{\vartheta_{23}\vartheta_{01}}{\vartheta_4\vartheta_5}, \qquad \lambda = \frac{\vartheta_2\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\vartheta_4}, \qquad \mu = \frac{\vartheta_2\vartheta_{01}}{\vartheta_5\vartheta_{34}},$$

les fonctions ϑ qui y entrent étant supposées à arguments nuls.

En désignant par θ les fonctions θ transformées par une quelconque des substitutions cherchées, on a nécessairement

$$\frac{\vartheta_{23}\vartheta_{01}}{\vartheta_4\vartheta_5} = \frac{\theta_{23}\theta_{01}}{\theta_4\theta_5}, \qquad \frac{\vartheta_2\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\vartheta_4} = \frac{\theta_2\theta_{23}}{\theta_{34}\theta_4}, \qquad \frac{\vartheta_2\vartheta_{01}}{\vartheta_5\vartheta_{34}} = \frac{\theta_2\theta_{01}}{\theta_5\theta_{34}},$$

(¹) BORCHARDT, *Sur le choix des modules dans les intégrales hyperelliptiques* (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII; 1879).

d'où l'on déduit sans peine

$$\frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} = \frac{\theta_{01}^2}{\theta_5^2}, \qquad \frac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta_4^2} = \frac{\theta_{23}^2}{\theta_4^2}, \qquad \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_{34}^2} = \frac{\theta_2^2}{\theta_{34}^2},$$

ce qui montre que toute substitution cherchée doit, avant tout, reproduire les caractéristiques

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

correspondant aux fonctions ϑ,

$$\vartheta_5, \quad \vartheta_{23}, \quad \vartheta_4, \quad \vartheta_{01}, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_{34}.$$

Développons ces conditions.

On sait que les éléments de la caractéristique transformée $\begin{bmatrix} g'_1 & g'_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{bmatrix}$ en fonction des éléments de l'ancienne caractéristique $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} g'_1 &= g_1 a_0 + g_2 a_1 + h_2 a_2 + h_1 a_3 + a \qquad \text{où} \qquad a = a_0 a_3 + a_1 a_2, \\ g'_2 &= g_1 b_0 + g_2 b_1 + h_2 b_2 + h_1 b_3 + b \qquad\qquad b = b_0 b_3 + b_1 b_2, \\ h'_2 &= g_1 c_0 + g_2 c_1 + h_2 c_2 + h_1 c_3 + c \qquad\qquad c = c_0 c_3 + c_1 c_2, \\ h'_1 &= g_1 d_0 + g_2 d_1 + h_2 d_2 + h_1 d_3 + d \qquad\qquad d = d_0 d_3 + d_1 d_2; \end{aligned}$$

en exprimant les conditions trouvées plus haut, on a

$$\begin{array}{lllll} a \equiv 0, & a_0 + a_1 + a \equiv 1, & a_1 + a \equiv 0, & a_0 + a \equiv 1, & a_2 + a \equiv 0, \\ b \equiv 0, & b_0 + b_1 + b \equiv 1, & b_1 + b \equiv 1, & b_0 + b \equiv 0, & b_2 + b \equiv 0, \\ c \equiv 0, & c_0 + c_1 + c \equiv 0, & c_1 + c \equiv 0, & c_0 + c \equiv 0, & c_2 + c \equiv 1, \\ d \equiv 0, & d_0 + d_1 + d \equiv 0, & d_1 + d \equiv 0, & d_0 + d \equiv 0, & d_2 + d \equiv 0, \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_0 + a_2 + a &\equiv 1, \\ b_0 + b_2 + b &\equiv 0, \\ c_0 + c_2 + c &\equiv 1, \\ d_0 + d_2 + d &\equiv 0, \end{aligned}$$

toutes ces congruences étant prises selon le mod 2. On en tire immédiatement

$$\begin{array}{llll} a_0 \equiv 1, & a_1 \equiv 0, & a_2 \equiv 0, & a_3 \equiv 0, \\ b_0 \equiv 0, & b_1 \equiv 1, & b_2 \equiv 0, & b_3 \equiv 0, 1, \\ c_0 \equiv 0, & c_1 \equiv 0, & c_2 \equiv 1, & c_3 \equiv 0, 1, \\ d_0 \equiv 0, & d_1 \equiv 0, & d_2 \equiv 0, & d_3 \equiv 0, 1. \end{array}$$

De plus, comme les substitutions doivent appartenir à la classe de celles que nous étudions, nous avons

$$\begin{aligned} c_0 &\equiv \mathrm{D}\,a_2, & d_0 &\equiv \mathrm{D}\,b_2, \\ c_1 &\equiv \mathrm{D}\,a_3, & d_1 &\equiv \mathrm{D}\,b_3, \\ c_2 &\equiv a_0, & d_2 &\equiv b_0, \\ c_3 &\equiv a_1, & d_3 &\equiv b_1, \end{aligned}$$

et, par suite, nous avons, soit

$$\text{(I)} \quad \left| \begin{array}{llll} a_0 \equiv 1 & a_1 \equiv 0 & a_2 \equiv 0 & a_3 \equiv 0 \\ b_0 \equiv 0 & b_1 \equiv 1 & b_2 \equiv 0 & b_3 \equiv 0 \\ c_0 \equiv 0 & c_1 \equiv 0 & c_2 \equiv 1 & c_3 \equiv 0 \\ d_0 \equiv 0 & d_1 \equiv 0 & d_2 \equiv 0 & d_3 \equiv 1 \end{array} \right| \quad \text{et} \quad \text{D quelconque,}$$

soit

$$\text{(II)} \quad \left| \begin{array}{llll} a_0 \equiv 1 & a_1 \equiv 0 & a_2 \equiv 0 & a_3 \equiv 0 \\ b_0 \equiv 0 & b_1 \equiv 1 & b_2 \equiv 0 & b_3 \equiv 1 \\ c_0 \equiv 0 & c_1 \equiv 0 & c_2 \equiv 1 & c_3 \equiv 0 \\ d_0 \equiv 0 & d_1 \equiv 0 & d_2 \equiv 0 & d_3 \equiv 1 \end{array} \right| \quad \text{et} \quad \text{D pair.}$$

Remarquons, en outre, que les conditions

$$\begin{aligned} (ab)_{01} - \mathrm{D}(ab)_{23} &= \pm 1, \\ (ab)_{12} + (ab)_{03} &= 0 \end{aligned}$$

doivent être satisfaites. Or, dans les substitutions (II), la seconde condition ne peut être satisfaite. On doit donc rejeter les substitutions de ce type.

Pour savoir si les conditions trouvées (I) sont suffisantes, il suffit d'examiner ce que deviennent $\varkappa$, λ, μ quand on leur applique une telle substitution.

On sait par la théorie de la transformation linéaire que chaque fonction ϑ se reproduit, multipliée par un facteur de la forme

$$\mathfrak{S} e^{-\frac{i\pi}{4}\omega'},$$

ω' étant un nombre entier dont l'expression générale a été donnée au début de cette Partie; $\mathfrak{S}$ une constante commune à toutes les fonctions ϑ et que, par suite, on peut laisser de côté.

En calculant les facteurs qui s'introduisent, de ce chef, dans les nouvelles expressions de $\varkappa$, λ, μ, on trouve respectivement, en n'écrivant que le ré-

sidu de leur exposant suivant le mod 8,

$$+ i\pi D \frac{a_0 b_2 - a_2 b_1}{2},$$

$$+ i\pi D \frac{a_0 b_2 - a_2 b_1}{2},$$

$$+ i\pi D \frac{b_2}{2},$$

si D est pair, $\varkappa$, λ, μ se reproduisent; donc, les conditions (I) caractérisent entièrement, dans ce cas, le sous-groupe qui laisse les modules de Richelot invariables.

Si D est impair, pour que $\varkappa$, λ, μ soient invariables, il faut que l'on ait en plus

$$a_2 \equiv 0, \qquad b_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 4).$$

De plus, ces deux classes de substitutions forment des groupes.

47. On peut également voir ce que deviennent, par les substitutions du groupe, les invariants de la forme binaire du sixième ordre qui intervient en dénominateur dans les intégrales de notre système de fonctions hyperelliptiques. On déduit de cette étude trois nouvelles fonctions particulières du groupe, qui s'expriment ainsi au moyen de ces invariants.

Fonctions du groupe en général.

48. Mais arrivons aux fonctions du groupe, considérées en général, et en suivant la méthode de formation indiquée par M. Picard dans son Mémoire *Sur la théorie des fonctions hyperabéliennes.*

Il sera commode, dans ce qui va suivre, d'avoir à la place des deux demi-plans positifs pour ξ et η deux cercles c et c' décrits de l'origine comme centre avec des rayons égaux à l'unité, c dans le plan des ξ, c' dans le plan des η. A cet effet, effectuons sur toutes nos substitutions la substitution suivante

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{array}{c|l} \xi & \dfrac{i}{2}\,\dfrac{\xi_1 + i}{\xi_1 - i}, \\ \eta & \dfrac{i}{2}\,\dfrac{\eta_1 + i}{\eta_1 - i}. \end{array}$$

Comme son déterminant est égal à 1, les déterminants

$$ad - bc, \quad lq - mp$$

resteront égaux à 1 et les conditions $\xi'' > 0$, $\eta'' > 0$ seront remplacées par les suivantes

$$\xi_1'^2 + \xi_1''^2 - 1 < 0 \qquad \text{et} \qquad \eta_1'^2 + \eta_1''^2 - 1 < 0,$$

c'est-à-dire que les points ξ et η devront être à l'intérieur des cercles désignés par c et c'.

Les cinq substitutions fondamentales deviennent

$$T^{-1}\alpha T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ \frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}+1,\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}-1\right),$$

$$T^{-1}\beta T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ \frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}-\sqrt{D},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}-\sqrt{D}\right),$$

$$T^{-1}\gamma T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ -\frac{1}{\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}},\ -\frac{1}{\frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}}\right),$$

$$T^{-1}\delta T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ h_0\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ h\frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}\right),$$

$$T^{-1}\varepsilon T = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}\right),$$

où l'on a posé

$$h_0 = a - c\sqrt{D}, \qquad h = a + c\sqrt{D}.$$

49. Cela étant, considérons, avec M. Picard, une fonction de deux variables

$$R(\xi_1, \eta_1),$$

rationnelle et holomorphe, tant que ξ et η sont à l'intérieur ou sur la circonférence des cercles c et c'.

Formons, pour toutes les substitutions de notre groupe qui sont du type (A), l'expression

$$R\left(\frac{a\xi_1+b}{c\xi_1+d},\ \frac{a'\eta_1+b'}{c'\eta_1+d'}\right)(c\xi_1+d)^{-2m}(c'\eta_1+d')^{-2m},$$

qui peut s'écrire

$$R[f(\xi_1), F(\eta_1)]\left[\frac{D(f, F)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m.$$

Formons de même, pour les substitutions du type (B), l'expression

$$R\left(\frac{\alpha'\eta_1+\beta'}{\gamma'\eta_1+\delta'},\ \frac{\alpha\xi_1+\beta}{\gamma\xi_1+\delta}\right)(\gamma\eta_1+\delta)^{-2m}(\gamma'\xi_1+\delta')^{-2m},$$

qui peut s'écrire

$$R[F(\eta_1), f(\xi_1)]\left[\frac{D(F, f)}{D(\xi, \eta)}\right]^m.$$

Dans ces expressions, m désigne un nombre entier supérieur à l'unité. Faisons la somme de toutes ces expressions pour les substitutions du groupe. Nous obtenons une série

$$\sum R(f, F)\left[\frac{D(f, F)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m + \sum R(F, f)\left[\frac{D(F, f)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m.$$

Nous allons montrer qu'elle est absolument convergente pour les valeurs de ξ_1 et η_1 situées à l'intérieur des cercles c et c'.

Commençons par remarquer qu'on peut trouver, en vertu des hypothèses faites sur $R(\xi_1, \eta_1)$, un nombre positif M, tel que l'on ait, quelle que soit la substitution $(\xi_1, \eta_1; f, F)$,

$$|R[f(\xi_1), F(\eta_1)]| < M$$

et aussi

$$|R[F(\eta_1), f(\xi_1)]| < M.$$

Il en résulte que les modules des termes de la série considérée sont respectivement inférieurs à

$$M|(c\xi_1 + d)^{-2m}(c'\eta_1 + d')^{-2m}|,$$

$$M|(\gamma\eta_1 + \delta)^{-2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{-2m}|,$$

et que, pour établir la convergence de la série considérée, il suffit de montrer que la suivante

$$\sum|(c\xi_1 + d)^{-2m}(c'\eta_1 + d')^{-2m}| + \sum|(\gamma\eta_1 + \delta)^{-2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{-2m}|$$

est convergente.

A cet effet, considérons un système de valeurs (ξ, η), ξ étant à l'intérieur de c, η à l'intérieur de c'.

Puisque le groupe est discontinu, on peut considérer, autour de (ξ, η), un domaine δ assez petit pour que tous les domaines transformés de δ par les substitutions du groupe n'aient aucun point commun entre eux et avec δ.

Posons alors

$$\xi_1 = \xi'_1 + i\xi''_1, \qquad \eta_1 = \eta'_1 + \eta''_1,$$

et envisageons l'intégrale quadruple

$$\int\int\int\int d\xi'_1\, d\xi''_1\, d\eta'_1\, d\eta''_1$$

étendue à chacun de ces domaines transformés de δ.

La somme de ces intégrales est finie, car ces intégrales sont toutes positives comme exprimant des produits d'aires et, en outre, leur somme est moindre que le produit des aires des deux cercles c et c'.

Or, comme chacun des domaines correspond au domaine δ par une des substitutions du groupe, on peut n'avoir, comme somme de toutes ces intégrales, qu'une intégrale étendue au seul domaine δ. On trouve ainsi

$$\int\int\int\int_{(\delta)} \Big\{ \sum [\mathfrak{I}(c\xi_1+d)(c'\eta_1+d')]^{-2} + \sum [\mathfrak{I}(\gamma\eta_1+\delta)(\gamma'\xi_1+\delta')]^{-2} \Big\} d\xi'_1\, d\xi''_1\, d\eta'_1\, d\eta''_1;$$

comme cette intégrale est comprise entre des limites finies, on en conclut que la série considérée est convergente pour $m \geqq 2$ et que la convergence est absolue.

50. La fonction Θ_1, dont nous venons de démontrer l'existence, est holomorphe pour toutes les valeurs des variables ξ_1 et η_1 comprises à l'intérieur des cercles c et c'. De plus, si l'on effectue sur les variables ξ_1, η_1 une substitution quelconque du groupe, chaque terme de la série se change en un autre terme de la même série, multiplié par

$$(c\xi_1+d)^{2m}(c'\eta_1+d)^{2m}$$

ou

$$(\gamma\eta_1+\delta)^{2m}(\gamma'\xi_1+\delta')^{2m},$$

suivant que la substitution opérée est du type (A) ou du type (B). On a donc, suivant les cas :

$$\Theta_1\left(\frac{a\xi_1+b}{c\xi_1+d}, \frac{a'\eta_1+b'}{c'\eta_1+d'}\right) = (c\xi_1+d)^{2m}(c'\eta_1+d)^{2m}\,\Theta_1(\xi,\eta),$$

$$\Theta_1\left(\frac{\alpha\eta_1+\beta}{\gamma\eta_1+\delta}, \frac{\alpha'\xi_1+\beta'}{\gamma'\xi_1+\delta'}\right) = (\gamma\eta_1+\delta)^{2m}(\gamma'\xi_1+\delta')^{2m}\,\Theta_1(\xi,\eta).$$

51. On pourrait craindre que les fonctions Θ_1 fussent identiquement nulles. C'est un point que M. Picard a examiné en détail dans le cas ana-

logue des fonctions hyperfuchsiennes (*Act. math.*, t. V) et sa méthode s'applique également au cas présent.

Considérons, en effet, le point $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$ et supposons, en premier lieu, qu'il n'y ait que la substitution unité qui transforme ce point en lui-même. Nous pourrons construire, autour du point ($\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$), un domaine assez petit pour qu'à tout point de ce domaine corresponde des points (ξ'_1, η'_1), tels qu'on ait

$$(\eta'_1 - \eta'_{10})(\xi'_{10} - \xi'_1) < (\eta_1 - \eta_{10})(\xi_{10} - \xi_1),$$

en posant

$$\xi'_1 = \frac{a\xi_1 + b}{c\xi_1 + d}, \qquad \eta' = \frac{a'\eta_1 + b'}{c'\eta_1 + d'};$$

comme on a

$$(\eta'_1 - \eta'_{10})(\xi'_{10} - \xi'_1) = \frac{1}{|(c\xi_1 + d)^2 (c'\eta_1 + d')^2|}(\eta_1 - \eta_{10})(\xi_{10} - \xi_1),$$

on en conclura

$$|(c\xi_1 + d)^2 (c'\eta_1 + d')^2| > 1,$$

et la série définissant Θ_1 pourra s'écrire

$$R(\xi_1, \eta_1) + \sum R(\xi'_1, \eta'_1) \frac{1}{(c\xi_1 + d)^{2m} (c'\eta_1 + d')^{2m}}$$
$$+ \sum R(\xi'_1, \eta'_1) \frac{1}{(\gamma\eta_1 + \delta)^{2m} (\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m}},$$

car on a une conclusion analogue pour les substitutions du type (B); les Σ de la formule précédente portant sur toutes les substitutions sauf la substitution unité. Si m est assez grand, l'expression précédente différera peu de $R(\xi, \eta)$ et ne sera donc pas identiquement nulle.

S'il y a N substitutions changeant le point ($\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$) en lui-même, la même conclusion s'impose. On peut, en effet, dans la série, mettre à part les termes correspondant à ces substitutions. On obtient

$$\sum R(\xi'_1, \eta'_1) \frac{1}{(c\xi_1 + d)^{2m} (c'\eta_1 + d')^{2m}} + \sum R(\xi'_1, \eta'_1) \frac{1}{(\gamma\eta_1 + \delta)^{2m} (\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m}}.$$

On a

$$|dd'| = 1, \qquad |\delta\delta'| = 1,$$

et, pour $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, ces termes deviennent

$$R(0, 0)\left[\sum \frac{1}{(dd')^{2m}} + \sum \frac{1}{(\delta\delta')^{2m}}\right],$$

quantité qui pourra toujours être considérée comme non identiquement nulle, puisque $R(o, o)$ et m sont arbitraires.

52. On peut également démontrer que, m étant suffisamment grand, on peut toujours trouver deux fonctions Θ_1 et Θ_2 dont le rapport ne soit pas constant.

A cet effet, formons l'expression

$$\Theta_1(\xi_1, \eta_1)\,\Theta'_1(\xi'_1, \eta'_1) - \Theta_1(\xi'_1, \eta'_1)\,\Theta'_1(\xi_1, \eta_1),$$

(ξ_1, η_1), (ξ'_1, η'_1) étant deux points arbitraires.

En supposant, comme tout à l'heure, que le point $(\xi_1 = o, \eta_1 = o)$ ne soit altéré que par la substitution unité, on voit que (ξ_1, η_1), (ξ'_1, η'_1) étant dans le domaine construit autour de $(\xi_1 = o, \eta_1 = o)$, on a, pour l'expression ci-dessus, une valeur peu différente de

$$R_1(\xi_1, \eta_1)\,R'_1(\xi'_1, \eta'_1) - R_1(\xi'_1, \eta'_1)\,R'_1(\xi_1, \eta_1),$$

si m est assez grand. Si donc, R_1 et R'_1 sont arbitraires, cette valeur n'est pas identiquement nulle.

On arrive à la même conclusion, si l'on suppose qu'il y ait N substitutions conservant le point $(\xi_1 = o, \eta_1 = o)$.

Enfin, en examinant de la même manière le déterminant fonctionnel de deux fonctions

$$F_1(\xi_1, \eta_1) = \frac{\Theta_1(\xi_1, \eta_1)}{\Theta'_1(\xi_1, \eta_1)}, \qquad F_2(\xi_1, \eta_1) = \frac{\Theta_2(\xi_1, \eta_1)}{\Theta'_2(\xi_1, \eta_1)},$$

on établit que toutes les fonctions F ne sont pas fonctions de l'une d'entre elles, si les fonctions rationnelles R sont arbitraires.

En résumé, nous voyons donc qu'il existe sûrement des fonctions

$$F(\xi_1, \eta_1) = \frac{\Theta_1(\xi_1, \eta_1)}{\Theta'_1(\xi_1, \eta_1)}$$

invariables par toutes les substitutions du groupe. Il suffit que Θ_1 et Θ'_1 correspondent à la même valeur du nombre entier m.

53. Exprimons la fonction Θ, au moyen des anciennes variables ξ et η. Posons

$$\frac{i}{2}\,\frac{f_j(\xi_1) + i}{f_j(\xi_1) - i} = \varphi_j(\xi_1),$$

$$\frac{i}{2}\,\frac{F_j(\eta_1) + i}{F_j(\eta_1) - i} = \Phi_j(\eta_1),$$

la substitution $[\xi_1, \eta_1, f_j(\xi_1), F_j(\eta_1)]$ étant une substitution quelconque du groupe et du type A.

On a

$$\frac{D(f_j, F_j)}{D(\xi_1, \eta_1)} = \frac{D(f_j, F_j)}{D(\varphi_j, \Phi_j)} \frac{D(\varphi_j, \Phi_j)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi_1, \eta_1)},$$

mais

$$\frac{D(f_j, F_j)}{D(\varphi_j, \Phi_j)} = \frac{1}{\left(-\varphi_j + \frac{i}{2}\right)^2 \left(-\Phi_j + \frac{i}{2}\right)^2},$$

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi_1, \eta_1)} = \frac{1}{(\xi_1 - i)^2} \frac{1}{(\eta_1 - i)^2} = \left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^2 \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^2,$$

et l'on aura des résultats analogues pour les substitutions du type B. Il en résulte que l'on aura

$$\Theta_1(\xi_1, \eta_1) = \left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^{2m} \Theta(\xi, \eta),$$

où l'on a posé

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum R(f_j, F_j) \frac{1}{\left(-\varphi_j + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\Phi_j + \frac{i}{2}\right)^{2m}} \left[\frac{D(\varphi_j, \Phi_j)}{D(\xi, \eta)}\right]^m$$
$$+ \sum R(F_k, f_k) \frac{1}{\left(-\Phi_k + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\varphi_k + \frac{i}{2}\right)^{2m}} \left[\frac{D(\Phi_k, \varphi_k)}{D(\xi, \eta)}\right]^m.$$

$\Theta(\xi, \eta)$ est manifestement une fonction de la même nature que $\Theta_1(\xi_1, \eta_1)$ c'est-à-dire qui se reproduit, multipliée par $\left[\frac{D(\varphi_i, \Phi_i)}{D(\xi, \eta)}\right]^m$, quand on y remplace ξ et η respectivement par φ_i et Φ_i.

Comme on a, de plus,

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum R(f_j, F_j) \left[\frac{D(f_j, F_j)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m \frac{1}{\left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^{2m}}$$
$$+ \sum R(F_k, f_k) \left[\frac{D(F_k, f_k)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m \frac{1}{\left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^{2m}}.$$

On voit que $\Theta(\xi, \eta)$ tend vers o quand ξ et η croissent sans limite, car la série est convergente, et chaque terme tend vers zéro.

54. Ainsi que nous l'avons vu, il y a trois substitutions du groupe laissant invariable le point à l'infini A du domaine fondamental. Ce sont les

substitutions

$$(\xi, \eta; \xi + 1, \quad \eta - 1),$$
$$(\xi, \eta; \xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}),$$
$$(\xi, \eta; h_0\xi, h\eta).$$

Il en résulte que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}
\Theta(\xi + 1, \eta - 1) &= \Theta(\xi, \eta),\\
\Theta(\xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}) &= \Theta(\xi, \eta),\\
\Theta(h_0\xi, h\eta) &= \Theta(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Prenant comme variables $\xi + \eta = u$, $\xi - \eta = v$, les trois substitutions relatives au sommet A deviennent

$$(u, v; u, v + 2),$$
$$(u, v; u - 2\sqrt{D}, v),$$
$$(u, v; au - c\sqrt{D}\, v, -c\sqrt{D}\, u + av),$$

et les trois équations fonctionnelles correspondantes sont

$$\begin{aligned}
\Theta(u, v) &= \Theta(u, v + 2),\\
\Theta(u, v) &= \Theta(u - 2\sqrt{D}, v),\\
\Theta(u, v) &= \Theta(au - c\sqrt{D}\, v, -c\sqrt{D}\, u + av).
\end{aligned}$$

Rappelons de plus qu'au sommet A on a

$$\zeta_1, \eta_1 \text{ comprises entre des limites finies,}$$
$$\lim \xi_2 = \infty, \qquad \lim \eta_2 = \infty$$

et

$$\frac{\xi_2}{\eta_2} = \zeta \text{ comprise entre deux limites finies, comprenant entre elles l'unité.}$$

Il en résulte que l'on a

$$u_1 \text{ et } v_1 \text{ comprises entre des limites finies,}$$
$$\lim u_2 = \lim \eta_2(\zeta + 1) = \infty,$$
$$\lim v_2 = \lim \eta_2(\zeta - 1) = \infty.$$

Le signe de u_2 est toujours le même, mais celui de v_2 peut varier.

Il importe donc de considérer autour du point A trois régions

$$\begin{array}{ll} 1^\circ \text{ région} \ldots\ldots & \zeta - 1 > \delta, \\ 2^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots & \zeta - 1 < -\delta, \\ 3^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots & -\delta < \zeta - 1 < \delta, \end{array}$$

δ étant une quantité positive déterminée, aussi petite que l'on veut.

Si un point variable s'approche du point A, en restant dans la première région, v_2 finit toujours par demeurer positive; en restant dans la seconde région, v_2 est toujours négative si l'on est assez voisin de A; et, si le point variable est dans la troisième région, v_2 est soit positive soit négative.

Posons

$$e^{i\pi v} = y.$$

Dans le voisinage du point A et dans la première région, comme la partie réelle de $i\pi v$ est $-\pi\eta_2(\zeta - 1)$, y tend dans ces conditions vers zéro et l'on en conclut que la fonction holomorphe Θ est développable en série convergente suivant les puissances positives de y, c'est-à-dire de $e^{i\pi v} = e^{i\pi(\xi-\eta)}$. On a donc

$$\Theta(u, v) = \Theta_0(u) + \Theta_1(u)\, e^{i\pi v} + \ldots + \Theta_n(u)\, e^{ni\pi v} + \ldots,$$

$\Theta_n(u)$ étant une fonction holomorphe en u, qui satisfait, d'après la seconde équation fonctionnelle, à la condition

$$\Theta_n(u) = \Theta_n(u - 2\sqrt{D}),$$

et comme, au voisinage du point A, le coefficient de u_2 a toujours le même signe $+1$, on en conclut, comme plus haut,

$$\Theta_n(u) = A_{0n} + A_{1n}\, e^{\frac{i\pi}{\sqrt{D}}u} + A_{2n}\, e^{\frac{2i\pi}{\sqrt{D}}u} + \ldots + A_{m,n}\, e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{D}}u} + \ldots.$$

On a donc, en définitive, au voisinage du point A, dans la première région, un développement de la forme

$$(1) \qquad \Theta(\xi, \eta) = \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n A_{m,n}\, e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)}\, e^{ni\pi(\xi-\eta)},$$

$\sqrt{D}$ ayant sa valeur arithmétique et les coefficients $A_{m,n}$ possédant la propriété que nous allons indiquer.

Le terme général de cette série peut s'écrire

$$A_{m,n} e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{D}} u + ni\pi v}.$$

Si nous effectuons, dans ce terme, la troisième substitution relative au point A, nous obtenons

$$A_{m,n} e^{\frac{i\pi}{\sqrt{D}} (ma - ncD) u + i\pi(-mc + na) v}.$$

Si nous écrivons maintenant que la troisième équation fonctionnelle est satisfaite, il faut écrire que les coefficients des mêmes puissances de e sont égales. Or, prenons le terme d'indices m et n dans le premier développement et le terme d'indices m' et n' dans le développement transformé. Pour que les puissances de e soient les mêmes, on devra avoir

$$m = m'a - n'cD,$$
$$n = -m'c + n'a$$

ou

$$m' = ma + ncD,$$
$$n' = na + mc,$$

ce qui montre qu'à un terme du second développement ne correspond un terme du premier, de même exposant de e que si l'on a entre les indices m', n' les relations

$$m'a - n'cD > 0, \quad -m'c + n'a > 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{cD}{a} < \frac{m'}{n'} < \frac{a}{c}.$$

Comme, d'autre part, à tout terme du premier développement correspond un terme dans le second développement, on en conclut que tout coefficient $A_{m,n}$ dans lequel les indices ne satisfont pas aux inégalités

$$\frac{cD}{a} < \frac{m}{n} < \frac{a}{c}$$

est nul.

Comme toute fraction de la forme

$$\frac{\lambda cD + \mu a}{\lambda a + \mu c},$$

λ et μ étant des entiers positifs, est comprise entre $\frac{cD}{a}$ et $\frac{a}{c}$, on s'assure

qu'il y a une infinité de coefficients $A_{m,n}$ non nuls et une infinité de tels coefficients nuls et, de plus, que les plus petites valeurs de m et n pour lesquelles le coefficient correspondant n'est pas nul, sont

$$m = cD \quad \text{et} \quad n = a;$$

par exemple, si $D = 5$, on a

$$m = 72, \qquad n = 161,$$

de telle sorte que la série Θ a un facteur qui est, dans ce cas particulier de $D = 5$,

$$e^{\frac{72i\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+161i\pi(\xi-\eta)}.$$

Dans la seconde région, des considérations tout à fait identiques nous montrent que l'on a le développement analogue,

$$(2) \qquad \Theta(\xi, \eta) = \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n A_{m,n}\, e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)}\, e^{-ni\pi(\xi-\eta)},$$

les coefficients $A_{m,n}$ jouissant des mêmes propriétés que dans le développement (1).

55. Reste la troisième région. Dans sa *Théorie des fonctions fuchsiennes*, M. Poincaré a démontré qu'on pouvait modifier le domaine fondamental R_0 de la manière suivante : On en retranche une région S_0 et l'on ajoute, par compensation, la transformée $S_{0,p}$ de S_0 par une substitution déterminée $[z, f_p(z)]$, choisie arbitrairement dans le groupe.

Nous pouvons appliquer ici autour du point A le même procédé, en prenant pour S_0 la troisième région définie par

$$-\delta < \zeta - 1 < \delta,$$

et en choisissant la substitution

$$[\xi, \eta; (a - c\sqrt{D})^p \xi, (a + c\sqrt{D})^p \eta],$$

de manière que la région $S_{0,p}$ n'empiète pas sur les deux premières régions définies plus haut.

La région $S_{0,p}$ est définie par les inégalités

$$(1-\delta)\left(\frac{a+c\sqrt{D}}{a-c\sqrt{D}}\right)^p < \zeta < (1+\delta)\left(\frac{a+c\sqrt{D}}{a+c\sqrt{D}}\right)^p$$

ou

$$\frac{(1-\delta)(a+c\sqrt{D})^p-(a-c\sqrt{D})^p}{(a-c\sqrt{D})^p}<\zeta-1<\frac{(1+\delta)(a+c\sqrt{D})^p-(a-c\sqrt{D})^p}{(a-c\sqrt{D})^p}.$$

On voit que, si l'on choisit δ assez petit d'une part, et p assez grand d'autre part, $\zeta-1$ aura dans la région $S_{0,p}$ un signe constant, et cette région n'aura aucune partie commune avec les régions utilisées plus haut

$$\zeta-1>\delta \qquad \text{et} \qquad \zeta-1<-\delta.$$

Dans le cas particulier considéré plus haut où $D=5$, on a

$$(a+c\sqrt{D})^p=(q+4\sqrt{5})^{2p}=(321,992\ldots)^p,$$
$$(a-c\sqrt{D})^p=(q-4\sqrt{5})^{2p}=(\ \ 0,008\ldots)^p,$$

car 9 et 4 sont les plus petites solutions de l'équation de Pell

$$x^2-5y^2=1,$$

et l'on a

$$a+c\sqrt{D}=(9+4\sqrt{5})^2, \qquad a-c\sqrt{D}=(9-4\sqrt{5})^2;$$

$S_{0,p}$ est donc définie par

$$(40249)^p-1-\delta(40249)^p<\zeta-1<(40249)^p-1+\delta(40249)^p,$$

inégalités qui montrent bien que l'on peut faire pour δ et p le choix indiqué.

On aura donc, autour de A, une région où $\zeta-1$ gardera un signe constant et dans laquelle on pourra représenter $\Theta(\xi,\eta)$ par un développement de la forme (1) ou de la forme (2).

56. Cela étant, considérons deux fonctions $\Theta(\xi,\eta)$, $\Theta'(\xi,\eta)$ correspondant à deux fonctions rationnelles R et R' indépendantes l'une de l'autre et à un même nombre entier m.

Nous allons démontrer que, dans le domaine fondamental du groupe, elles ne peuvent avoir qu'un nombre fini de racines communes, ne formant pas un *continuum*.

Il ne peut y avoir de doutes sur cette proposition qu'au voisinage du point A où les racines pourraient peut-être se condenser en un nombre infini.

Mais considérons la première région $\zeta-1>\delta$. Pour des points (ξ,η)

situés dans cette région, on a

$$\Theta(\xi,\eta)=e^{\frac{pi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+qi\pi(\xi-\eta)}\left(A_{p,q}+A_{p_1,q_1}\,e^{\frac{p_1\pi i}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+q_1 i\pi(\xi-\eta)}+\ldots\right),$$

$$\Theta'(\xi,\eta)=e^{\frac{pi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+qi\pi(\xi-\eta)}\left(A'_{p,q}+A'_{p'_1,q'_1}\,e^{\frac{p'_1\pi i}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+q'_1 i\pi(\xi-\eta)}+\ldots\right),$$

le facteur étant le même dans les deux développements, car il ne dépend que du nombre entier D.

Ces fonctions admettent d'abord les racines communes qu'on obtient en égalant ce facteur à o. On trouve ainsi le point A. Ce facteur mis de côté, comme il ne peut y en avoir d'autres, puisque $A_{p,q}$, $A'_{p,q}$ sont des constantes différentes de zéro, les développements en série, contenus entre crochets, ne peuvent avoir qu'un nombre fini de racines communes, dans lesquelles ξ et η ont des valeurs aussi voisines qu'on veut de celles qui correspondent au point A.

Si l'on considère les développements correspondant à la seconde région ou à la région transformée de la troisième, les conclusions restent les mêmes.

57. En répétant, sans y rien changer, un raisonnement fait par M. Picard dans sa *Théorie des fonctions hyperfuchsiennes* (*A. M.*, t. V, p. 175), on voit que ce nombre fini de racines est indépendant des fonctions rationnelles R et R′ et ne dépend que du groupe considéré et du nombre m.

58. On conclut de là que *trois* quelconques des fonctions du groupe sont liées algébriquement, car les valeurs de deux de ces fonctions étant fixées, il en résulte pour la troisième un nombre limité de valeurs.

On démontre également sans peine qu'on peut exprimer rationnellement toutes les fonctions du groupe à l'aide de trois d'entre elles, liées par une relation algébrique. Former effectivement de telles relations algébriques, même dans les cas les plus particuliers, paraît un problème difficile. On voit, en effet, que les fonctions que nous considérons, les fonctions dérivées des fonctions ϑ par exemple, ne sont fonctions de deux variables que par l'intermédiaire du nombre entier D, et l'on conçoit que la présence de cet entier rende impossible, d'une manière générale, les éliminations qu'il faudrait effectuer pour obtenir la relation algébrique.

Le théorème qui précède montre, en outre, l'importance de l'étude de quelques fonctions particulières du groupe, puisqu'à l'aide d'entre elles, on peut exprimer toutes les autres.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Exposition de la méthode de Gauss, pour le calcul des variations séculaires.

Vu et approuvé :
Paris, le 25 novembre 1897.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 25 novembre 1897.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

25279 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Math 4508.98.3
Sur une classe particuliere de gro
Cabot Science 003323819
3 2044 091 900 316